МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи
Українського державного
університету імені Михайла
Драгоманова,
доктор фізико-математичних
наук, професор
__________Григорій ТОРБІН

ПРОГРАМА
ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ

для вступників на третій (освітньо-науковий) рівень вищої освіти
для здобуття наукового ступеня доктора філософії (PhD)
галузь знань 11 Математика та статистика
спеціальність 111 Математика

Київ 2024

Програма вступного іспиту в аспірантуру для здобувачів наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. – К. УДУ імені Михайла Драгоманова, 2024.

Укладачі програми:

Микола ПРАЦЬОВИТИЙ	доктор фізико-математичних наук, професор, декан факультету математики, інформатики та фізики
Григорій ТОРБІН	доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи
Роман НІКІФОРОВ	кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математичного аналізу, диференціальних рівнянь та теорії ймовірностей
Яніна ГОНЧАРЕНКО	кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри вищої математики
Дмитро ТРЕБЕНКО	кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри вищої математики

Рекомендовано Вченої радою УДУ імені Михайла Драгоманова
(протокол № 8 від 28 березня 2024 року)

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Програма вступного екзамену містить основні, найбільш важливі питання з геометрії, алгебри, математичного аналізу, теорії ймовірностей і основ фрактального аналізу.

Метою вступного екзамену з математики є перевірка рівня загальної математичної культури вступників та їх готовності до науково-дослідницької діяльності.

ПИТАННЯ ДО ЕКЗАМЕНУ ДЛЯ ВСТУПУ В АСПІРАНТУРУ

1. Аналіз

1. **Елементи теорії множин.** Відображення множин. Еквівалентні множини. Порівняння потужностей. Скінченні і зліченні множини. Теорема про потужність усіх підмножин.
2. **Метричні простори.** Збіжність у метричних просторах, повнота і поповнення. Приклади. Стискаючі відображення і нерухомі точки. Компактні множини.Критерії компактності.
3. **Функції.** Властивості неперервних на компакті функцій. Диференційовні функції однієї та багатьох змінних, їх властивості. Формули Тейлора та їх застосування. Екстремум і умовний екстремум функції багатьох змінних. Теорема про неявну функцію.
4. **Ряди.** Числові ряди: ознаки збіжності, умовна і абсолютна збіжність. Функціональні ряди. Ознаки їх рівномірної збіжності. Степеневі ряди та умови їх збіжності.
5. **Визначені інтеграли.** Умови існування. Зв’язок з невизначеним інтегралом. Застосування.
6. **Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли.** Теорема існування, заміна змінних і обчислення кратних інтегралів. Формули Гріна, Гауса-Остроградського і Стокса. Умова незалежності криволінійного інтегралу від шляху інтегрування.
7. **Невласні і залежні від параметру інтеграли.** Ознаки збіжності, диференціювання та інтегрування за параметром.
8. **Міра та інтеграл.** Міри Лебега і Лебега-Стілтьєса. Означення і властивості інтегралу Лебега. Теорема про граничний перехід під знаком інтеграла. Добуток мір і теорема Фубіні. Функції обмеженої варіації і заряди. Інтеграл Стілтьєса. Абсолютно неперервні функції. Абсолютна неперервність і сингулярність мір. Похідна монотонної функції. Похідна від інтегралу за верхньою межею. Інтеграли по довільних мірах.
9. **Функції комплексної змінної.** Елементарні функції комплексної змінної. Умова аналітичності функції. Теорема і формула Коші. Принцип максимуму модуля. Розклад в ряд Тейлора і Лорана. Класифікація ізольованих особливих точок. Теорема Ліувілля. Лишки. Принцип аргументу. Теорема Руше. Властивості єдиності аналітичних функцій. Аналітичне продовження. Конформні відображення. Теорема Рімана.

10. **Лінійні нормовані простори.** Поняття лінійного нормованого простору. Приклади і основні властивості. Простори C, L_p, l_p, їх повнота, щільні множини у цих просторах. Лінійні неперервні функціонали. Теорема Гана-Банаха. Спряжений простір, його повнота. Слабка збіжність лінійних неперервних функціоналів. Слабка топологія в спряженому просторі. Гільбертові простори. Теорема про ортогональну проекцію. Ортонормовані системи і базиси. Нерівність Бесселя і рівність Парсеваля. Ізоморфізм сепарабельних гільбертових просторів.
11. **Лінійні оператори.** Означення і найпростіші властивості. Простір лінійних обмежених операторів. Добуток операторів. Обернений оператор. Теорема Банаха про обернений оператор. Сильна збіжність операторів. Теорема Банаха-Штейнгауза. Резольвента і спектр оператора. Компактні оператори, їх властивості. Теореми Фредгольма для рівнянь з компактними операторами. Самоспряжені оператори, їх спектр. Оператори Гільберта-Шмідта.

Л і т е р а т у р а

1. Дороговцев А. Я. Математический анализ. – К.: Факт, 2004. – 558с.
2. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. – Львів: Число,2014. – 558 с.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функціонального анализа.– М.: Наука, 1989. – 624с.
4. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Підручник. – Львів, 2012. –590 с. – (Серія “Університетська бібліотека”).
5. Мельник Т.А, Комплексний аналіз: підручник. Київ: ВПЦ «Київський університет»,2015.
6. Shabat B.V. Introduction to complex analysis, Part.1,2. AMS Publishers, 2019.
7. Самойленко В.Г. та ін. Комплексний аналіз, приклади і задачі. Київський університет, 2010.
8. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. Ч.1–3.— К.:Вища школа, 1990, 1991,1992.— 384, 392, 360с.
9. Шкіль М.І. Математичний аналіз. Ч.1–2.— К.:Вища школа, 2005.— 447с., 510с.

2. Алгебра

1. **Лінійна алгебра.** Лінійні простори і лінійні відображення. Операції з лінійними просторами (пряма сума, фактор-простори). Спряжений простір. Власні вектори і значення лінійних операторів. Жорданова нормальна форма лінійного оператора. Евклідові простори. Ортогональні, унітарні та самоспряжені оператори. Симплектичні оператори. Геометрія квадратичних форм. Приведення квадратичної форми до канонічного виду.
2. **Теорія груп.** Означення групи, підгрупи, нормального дільника, фактор-групи. Розклад групи за нормальним дільником. Приклади скінченних, нескінченних, абелевих, неабелевих, циклічних груп. Гомоморфізми груп.
3. **Елементи загальної алгебри.** Кільця, підкільця, ідеали, модулі та їх

гомоморфізми. Алгебри, приклади.

Л і т е р а т у р а

1. Ленг С. Алгебра. – М.: Мир, 1968.
2. Завало С.Т. Курс алгебри. - К.: Вища школа, 1985.
3. *Требенко Д.Я., Требенко О.О.* Алгебра і теорія чисел: У 2 ч. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2009. – Ч.1. – 420 с.
4. D.C.Lay, Linear Algebra and Its Applications (4th ed.), Addison Wesley, 2012.
5. D.Poole, Linear Algebra: A Modern Introduction (4th ed.), Cengage-Brooks/Cole, 2014.

3. Диференціальні рівняння і математична фізика.

1. **Звичайні диференціальні рівняння.** Теорема Пікара існування та єдиності розв’язку задачі Коші. Основні класи рівнянь, які інтегруються в квадратурах. Рівняння Ріккаті. Особливі точки. Диференціальні рівняння *n*-го порядку. Рівняння Ейлера.
2. **Системи диференціальних рівнянь.** Загальний розв’язок. Теореми існування та єдиності. Неперервна залежність розв’язку задачі Коші від початкових даних та параметрів.
3. **Лінійні рівняння *n*-го порядку.** Розв’язок лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Основні властивості розв’язків. Однорідні і неоднорідні лінійні рівняння. Метод варіації довільних сталих.
4. **Системи лінійних рівнянь.** Фундаментальна матриця розв’язків. Формула Остроградського-Ліувілля. Перші інтеграли системи диференціальних рівнянь, їх існування та застосування.
5. **Крайові задачі.** Функція Гріна. Задача Штурма-Ліувілля. Власні значення та власні функції.
6. **Рівняння в частинних похідних.** Класифікація лінійних рівнянь другого порядку. Постановка задач для еліптичних, гіперболічних і параболічних рівнянь. Коректність постановки задач. Інтеграл Пуассона для рівняння теплопровідності. Функція Гріна теорії потенціалу для круга і кулі. Задача Коші для хвильового рівняння, формула д’Аламбера. Мішані задачі для гіперболічних і параболічних рівнянь. Метод Фур’є. Гармонічні функції та їх властивості.

Л і т е р а т у р а

1. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003. (3-е видання Київ: ВПЦ “Київський університет”, 2010)
2. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь,2001.
3. Михлин С. Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.
4. Коддингтон Э. Д., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. –М.: ИЛ, 1958.

5. Збірник задач підвищеної складності з курсу "Диференціальні рівняння" / О.В.Капустян [та ін.] ; за ред. М. О. Перестюка. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 79 с.
6. Кривошея СА, Перестюк М.О., Бурим В.М., Диференціальні та інтегральні рівняння. –К.:«Либідь», 2004.
7. Arnold V., Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag, 1992
8. Evans L.C. Partial Differential Equations, Providence: AMS, 1998.
9. Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними. – К.: Вища школа, 1995.

4. Теорія ймовірностей та математична статистика

1. **Аксіоми теорії ймовірностей** [1,2]. Випадкові величини, функції розподілу, числові характеристики випадкових величин [1,2].
2. **Характеристичні функції** [1,2]. Розподіли: біноміальні, пуасоновські, нормальні [2].
3. Нерівність Чебишова. Закон великих чисел [1,2]. Центральна гранична теорема [1,2]. Ланцюги Маркова з дискретним часом і скінченою множиною станів [1,2]. Пуасонівський процес. Процеси розмноження та загибелі [1,2].
4. **Методи оцінювання параметрів розподілів** (метод моментів, метод максимальної правдоподібності) [2]. Властивості оцінок (незміщенність, самостійність, ефективність) [2]. Лема Неймана-Пірсона [2].

Л і т е р а т у р а

1. Гіхман І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Теорія ймовірностей і математичнастатистика.— К.:Вища школа, 1988.— 439с.
2. Карташов М. В. Імовірність, процеси, статистика. К. : ВПЦ «Київський університет»,2007.
3. Бобик О.І., Берегова Г.І., Копитко Б.І. Теорія ймовірностей і математична статистика. –К.: ВД «Професіонал», 2007, 560 с.
4. Голомозий В. В., Карташов М. В., Ральченко К. В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики. К. : ВПЦ «Київський університет», 2015.
5. Дороговцев А.Я., Сільвестров Д. С., Скороход А. В., Ядренко М. Й. Теорія ймовірностей.Збірник задач. К.: Вища школа, 1980.

5. Елементи геометрії та топології

1. Топологічні та метричні простори. Аксіоми віддільності. Неперервні відображення та гомеоморфізми [1]
2. Поняття компактності, зв'язності та лінійної зв'язності. Теореми про збереження цих властивостей при неперервних відображеннях [1]
3. Поняття гомотопії відображень. Фундаментальна група топологічного простору.
4. Поняття многовиду та його дотичного розшарування. Класифікація

двовимірних компактних многовидів [2]. Кривина та скрут кривої. Формули Френе [2].
5. Перша та друга квадратична форми поверхні. Середня та гаусова кривина поверхні [2].

Л і т е р а т у р а

1. Келли Дж. Общая топология, М.: Наука. - 1968. - 383 с.
2. Дубровин Б.А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука. - 1979.- 760 с.
3. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Основа, 1995.
4. Aminov Yu., Differential geometry and topology of curves, CRC Press, 2003
5. Пришляк О.О. Основи сучасної топології. К. 2006.
6. Пришляк О.О. Диференціальна геометрія. К., Київ.ун-т, 2004.-68 с.

6. Елементи фрактального аналізу

1. Самоподібні множини. Самоподібні фрактали. Їх числові характеристики.
2. Міра Гаусдорфа. Розмірність Гаусдорфа-Безиковича.
3. Системи числення. Двосимвольні системи кодування дійсних чисел.
4. Сингулярні функції. Приклади. Функція Кантора, функція Салема, функція Мінковського.
5. Приклади ніде не монотонних та недиференційовних функцій.
6. Множина неповних сум абсолютно збіжного числового ряду.

Л і т е р а т у р а

1. *Crownover RM*. Introduction to Fractals and Chaos. Jones and Bartlett; 1995.
2. *Falconer K*. Fractal Geometry, 2003.
3. *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М*. Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування. – К. Наукова думка, 2013. – 288 с.
4. *Працьовитий М.В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. – Київ: Наукова думка, 2022. – 316с.
5. *Працьовитий М.В*. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
6. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208с.
7. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Спивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. – К.: Наукова думка, 1989. – 216 с.