

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА**

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ГОДА Тетяна Юрївна

Гриф

Прим. № ____

УДК 373.5.016:512.62]:37.091.64(043.3)

**ДИСЕРТАЦІЯ
МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ СУЧАСНИХ ЗАСОБІВ НАВЧАННЯ
ПРИ ВИВЧЕННІ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «ФУНКЦІЇ» УЧНЯМИ ЛІЦЕЮ**

01 Освіта/Педагогіка

014 Середня освіта

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело



Т. Ю. Года

Науковий керівник: **Шкільний Олександр Володимирович**

доктор педагогічних наук, професор

АНОТАЦІЯ

Года Т. Ю. Методика використання сучасних засобів навчання при вивченні змістової лінії «Функції» учнями ліцею. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії зі спеціальності 014 «Середня освіта». – Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, 2026.

Проблематика дослідження

Дисертаційна робота присвячена проблемі *забезпечення ефективного вивчення змістової лінії «Функції» шляхом включення в процес навчання учнів ліцею сучасних засобів навчання.*

У дослідженні проаналізовано історичну еволюцію змісту та методики навчання змістової лінії «Функції» в українській школі, виявлено ключові труднощі учнів у формуванні функціонально-графічних умінь, підтверджені результатами ЗНО/НМТ, ДПА та міжнародного дослідження PISA. Уточнено сутність поняття «сучасні засоби навчання» у контексті вивчення змістової лінії «Функції» та визначено їх потенціал для розвитку математичної грамотності, графічної інтуїції й дослідницької діяльності учнів. Досліджено психолого-педагогічні особливості сучасних здобувачів освіти, які характеризуються візуальним мисленням, прагненням до інтерактивності та високим рівнем цифрової включеності, що зумовлює необхідність оновлення методики навчання функцій. Систематизовано можливості використання динамічних математичних середовищ (GeoGebra, Desmos), платформ для інтерактивного навчання (Wordwall, ClassTime, AhaSlides), мультимедійних інструментів і технологій штучного інтелекту (далі – ШІ) створення умов для формування предметних та ключових компетентностей учнів.

У дисертації запропоновано теоретично обґрунтовану й експериментально перевірену (у форматі case study) методику системного використання сучасних засобів навчання у процесі вивчення степеневих, показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій. Пропонована методика забезпечує поєднання аналітичного, візуального й дослідницького підходів, забезпечення належного рівня математичної грамотності, функціонально-графічних умінь і навичок, математичної компетентності та навчальної мотивації учнів ліцею.

Прикладна спрямованість

Під прикладною спрямованістю вивчення змістової лінії «Функції» у дослідженні розуміється орієнтація змісту, форм, методів та засобів навчання на розкриття ролі функцій як універсального інструмента опису, аналізу та моделювання реальних процесів, що забезпечує формування в учнів ліцею здатності застосовувати математичні знання у життєвих ситуаціях, міжпредметних контекстах і майбутній професійній діяльності. Такий підхід передбачає використання математичних моделей, графічних інтерпретацій, динамічних симуляцій і цифрового моделювання для демонстрації практичного змісту та функціональної природи залежностей між величинами.

Основними методами реалізації прикладної спрямованості навчання функцій визначено:

- діяльнісний і дослідницький методи, що спрямовані на самостійне відкриття властивостей функцій через експерименти у динамічних середовищах (GeoGebra, Desmos);
- метод математичного моделювання, який забезпечує перенесення реальних або наближених до реальних ситуацій в освітній процес;
- проблемний метод, що стимулює аналітичне мислення та пошук рішень для ситуацій практичного змісту;
- проєктний метод, орієнтований на створення учнями власних

математичних моделей, дослідження реальних даних, розробка презентацій і цифрових продуктів;

- методи інтерактивного навчання, які поєднують візуалізацію, роботу з симуляціями, онлайн-опитуваннями та динамічними графіками.

Серед засобів реалізації прикладної спрямованості виокремлено:

- практико-орієнтовані задачі та приклади, що відображають реальні процеси (рух, зростання, спадання, фінансові моделі, природні й соціальні явища);

- динамічні цифрові моделі, через які учні отримують можливість експериментувати з параметрами функцій і спостерігати за змінами в реальному часі;

- проєкти та мінідослідження, у яких учні використовують функціональні залежності для аналізу статистичних даних, створення прогнозів або візуальних моделей;

- цифрові платформи та технологічні засоби (GeoGebra, Desmos, Wordwall, ClassTime, AhaSlides, AI-інструменти), використання яких забезпечує наочність, доступність і прикладна спрямованість навчального матеріалу.

Таким чином, прикладна спрямованість у вивченні функцій реалізується через поєднання теоретичних положень з практичними контекстами й широке використання сучасних цифрових інструментів, що сприяє глибшому розумінню учнями математичних залежностей та розвитку їхньої математичної грамотності, цифрової та дослідницької компетентностей.

Наукова новизна

Уперше:

- розроблено авторську методику системного використання сучасних засобів навчання у процесі вивчення функцій у профільній старшій школі (ліцеї);

- побудовано концептуальну модель інтеграції ІКТ в освітній процес, що забезпечує поєднання аналітичного, візуального та дослідницького підходів;

- визначено педагогічні умови ефективного застосування сучасних засобів навчання у процесі формування математичної компетентності учнів для формування функціонально-графічних умінь і навичок.

Удосконалено:

- методику застосування діяльнісного підходу в навчанні математики під час вивчення змістової лінії «Функції»;

- методику створення мультимедійних завдань для вивчення функцій;

- методику використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції», зокрема, для оцінювання рівня сформованості математичної компетентності в учнів ліцею.

Набули подальшого розвитку:

- теоретичні та практичні дослідження щодо реалізації міжпредметної інтеграції під час вивчення функцій у старшій профільній школі;

- способи формування інформаційно-цифрової компетентності учнів засобами математики.

Практична значущість

Розроблено:

- методичні рекомендації для вчителів щодо використання GeoGebra, Desmos, Wordwall, AhaSlides під час вивчення степеневих, показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій;

- авторські динамічні моделі та онлайн-завдання, через які забезпечується забезпечують розвиток графічної інтуїції й аналітичного мислення;

- добірку задач практичного змісту, що стосуються змістової лінії «Функції», для учнів ліцею.

Матеріали дисертації можуть бути використані вчителями закладів загальної середньої освіти, викладачами закладів фахової передвищої освіти та закладів неперервної освіти вчителів під час підготовки до занять та безпосередньо в освітньому процесі.

Ключові слова: Нова українська школа, методика навчання математики, профільне навчання математики, компетентнісний підхід у навчанні математики, формування ключових компетентностей учнів, математична компетентність, практична спрямованість навчання шкільного курсу математики, сучасні засоби навчання, інформаційно-комунікаційні технології, освітнє цифрове середовище, цифрові технології навчання, ІІІ, змістова лінія «Функції», побудова графіків основних елементарних функцій.

ABSTRACT

Hoda, T. Yu. Methodology for the use of modern teaching tools in studying the content line “Functions” by lyceum students.
– Qualification scientific work submitted as a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty 014 *Secondary Education*. – Ukrainian State University named after Mykhailo Drahomanov, Kyiv, 2026.

Research Focus

The dissertation is devoted to the problem of ensuring effective learning of the "Functions" content line by incorporating modern learning tools into the educational process of lyceum students.

The study analyzes the historical evolution of the content and methodology of teaching the "Functions" content line in Ukrainian schools, identifying key student difficulties in developing functional and graphical skills, as supported by the results of ZNO/NMT, DPA, and the international PISA assessment. The

essence of the concept of "modern learning tools" is clarified within the context of studying the functional content line, and their potential for developing students' mathematical literacy, graphical intuition, and research activities is determined. The psychological and pedagogical characteristics of modern Gen Z and Gen Alpha learners are examined—characterized by visual thinking, a drive for interactivity, and high levels of digital engagement—necessitating an update in function teaching methodologies. The capabilities of dynamic geometry environments (GeoGebra, Desmos), interactive platforms (Wordwall, ClassTime, AhaSlides), multimedia tools, and artificial intelligence (AI) technologies for fostering subject-specific and key competencies are systematized.

The dissertation proposes a theoretically grounded and experimentally tested (via case study format) methodology for the systematic application of modern learning tools when studying power, exponential, logarithmic, and trigonometric functions. The proposed methodology ensures a combination of analytical, visual, and research-based approaches, maintaining appropriate levels of mathematical literacy, functional and graphical skills, mathematical competence, and student learning motivation.

Applied Orientation

In this study, the applied focus of teaching the "Functions" content line is understood as aligning the content, forms, methods, and tools of instruction toward revealing the role of functions as a universal tool for describing, analyzing, and modeling real-world processes. This approach ensures that lyceum students develop the ability to apply mathematical knowledge in everyday situations, interdisciplinary contexts, and future professional activities. It involves using mathematical models, graphical interpretations, interactive simulations, and digital modeling to demonstrate the practical essence and functional nature of inter-variable dependencies.

The main methods for implementing the applied focus in teaching functions include:

- activity-based and inquiry-based methods, aimed at the independent discovery of function properties through experiments in dynamic environments (GeoGebra, Desmos);
- mathematical modeling method, which enables the transfer of real-world or realistic situations into the learning process;
- problem-based learning method, stimulating analytical thinking and problem-solving for practical contexts;
- project-based learning method, focused on student creation of mathematical models, real data analysis, and the development of presentations and digital products;
- interactive teaching methods, combining visualization, simulation work, online polling, and dynamic graphs.

The main tools for implementing an applied focus include:

- practice-oriented problems and examples reflecting real-world processes (motion, growth, decay, financial models, natural and social phenomena)
- interactive digital models allowing students to experiment with function parameters and observe real-time changes;
- projects and mini-research tasks where students utilize functional dependencies to analyze statistical data, create forecasts, or build visual models;
- digital platforms and technological tools (GeoGebra, Desmos, Wordwall, ClassTime, AhaSlides, AI tools) that ensure the clarity, accessibility, and applied focus of instructional materials.

Thus, the applied focus in studying functions is realized through combining theoretical concepts with practical contexts and the extensive use of modern digital tools, promoting a deeper student understanding of mathematical dependencies and fostering their mathematical literacy, digital, and research competencies.

Scientific Novelty

For the first time:

- a methodology for the systematic use of modern learning tools in teaching functions in specialized upper secondary school (lyceum) has been developed;
- a conceptual model for ICT integration into the educational process has been constructed, combining analytical, visual, and research-based approaches;
- pedagogical conditions for the effective application of modern learning tools in developing students' mathematical competence and functional-graphical skills have been defined.

Improved:

- the methodology for applying an activity-based approach in mathematics instruction when studying the "Functions" content line;
- the methodology for creating interactive tasks for studying functions;
- the methodology for using modern learning tools when studying the "Functions" content line, particularly for assessing lyceum students' level of mathematical competence.

Further developed:

- theoretical and practical research regarding interdisciplinary integration in teaching functions in specialized upper secondary school;
- approaches to developing students' information and digital competence through mathematics.

Practical Significance

Developed:

- methodological guidelines for teachers on using GeoGebra, Desmos, Wordwall, and AhaSlides when studying power, exponential, logarithmic, and trigonometric functions;
- original interactive models and online tasks designed to foster graphical intuition and analytical thinking;
- a collection of practice-oriented problems related to the "Functions" content line for lyceum students.

The dissertation materials can be utilized by general secondary education teachers, vocational higher education instructors, and continuing teacher education institutions in lesson preparation and direct instruction.

Keywords: New Ukrainian School, mathematics teaching methodology, specialized mathematics education, competence-based approach in mathematics teaching, developing students' key competencies, mathematical competence, practical focus of school mathematics instruction, modern learning tools, information and communication technologies, digital learning environment, digital learning technologies, AI, "Functions" content line, plotting graphs of basic elementary functions.

Список опублікованих праць за тематикою дослідження

Статті у наукових фахових виданнях

1. Годя Т., Школьник О. Про доцільність і напрямки вдосконалення методики навчання учнів матеріалу змістової лінії «функції та їх графіки». Фізико-математична освіта. 2022. Т. 35, № 3. С. 13–18. DOI: <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-035-3-002>.
2. Годя Т. Використання штучного інтелекту при підготовці вчителя до уроків, присвячених вивченню функцій у старшій профільній школі. Актуальні питання природничо-математичної освіти. 2024. Т. 24, № 2. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.14566717>.
3. Hoda T. Methodological approaches to overcoming learning losses in the topic “Logarithmic function” through interactive learning tools. ScienceRise: pedagogical education. 2025. № 3 (64). P. 66–70. DOI: <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2025.338936>.
4. Годя Т. Мотиваційні задачі для вивчення теми «Функції» учнями ліцею. Дидактика математики: теорія, досвід, інновації. 2026. Вип. 5. С. 36–49. DOI: <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2026-5-36-49>.

Матеріали науково-практичних конференцій

5. Годя Т. Ю. Особливості використання сучасних технологій для навчання математики / Т. Ю. Годя, О. Б. Шкільний // Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця (НПК-2021) : матеріали Міжнар. наук.-практ. конф., 9 груд. 2021 р., м. Суми. Суми : ФОП Цьома С. П., 2021. С. 136–137.

6. Годя Т. Ю. Особливості вивчення степеневих функцій в умовах змішаного навчання / Т. Ю. Годя // Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання : зб. тез доп. Всеукр. наук.-практ. конф. з міжнар. участю студентів, аспірантів і молодих учених, 1 груд. 2022 р., м. Чернігів. Чернігів : НУЧК імені Т. Г. Шевченка, 2022.

7. Годя Т. Ю. Розвиток креативного мислення під час вивчення тригонометричних функцій / Т. Ю. Годя // Матеріали XI Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків, 11–13 трав. 2023 р. Київ : Укр. держ. ун-т ім. Михайла Драгоманова, 2023.

8. Годя Т. Ю. Проведення розрахунково-графічних робіт під час вивчення показникових функцій / Т. Ю. Годя // Актуальні проблеми теорії та методики навчання математики : матеріали Всеукр. наук. конф., присвяч. 75-річчю каф. метод. навч. математики, 6–7 жовт. 2023 р., м. Київ. Київ, 2023.

9. Годя Т. Ю. Особливості використання сучасних технологій для вивчення тригонометричних функцій / Т. Ю. Годя // Проблеми математичної освіти (ПМО – 2023) : матеріали Міжнар. наук.-метод. конф., 6–7 квіт. 2023 р., м. Черкаси. Черкаси : Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2023.

10. Годя Т. Ю. Використання онлайн-дошок для розробки презентацій уроків з теми «Функції» / Т. Ю. Годя // Теорія і практика використання інформаційних технологій в умовах цифрової трансформації освіти : матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., 29 черв. 2023 р., м. Київ /

упоряд. І. А. Твердохліб. Київ : Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова, 2023.

11. Годя Т. Ю. Використання штучного інтелекту при підготовці вчителя до уроків, присвячених вивченню функцій у старшій профільній школі / Т. Ю. Годя // Актуальні питання природничо-математичної освіти : зб. наук. пр. Суми : СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2024. Вип. 2 (24). С. 131–140. DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.14566717>.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	1
Перелік умовних позначень.....	14
ВСТУП	15
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ.....	28
1.1. Ретроспективний аналіз вивчення змістової лінії «Функції» в Україні .	28
1.1.1. Еволюція цілей і змісту вивчення функцій в українській школі.	28
1.1.2. Еволюційні зміни у методиці вивчення змістової лінії «Функції» в українській школі.	41
1.2. Теоретичні основи і можливості використання сучасних засобів навчання при вивченні функцій учнями ліцею.....	55
1.2.1. Теоретичні основи використання сучасних засобів навчання в навчанні математики	55
1.2.2. Можливості використання сучасних засобів навчання математики ..	63
1.3. Психолого-педагогічні основи вивчення функцій здобувачами освіти різних вікових категорій.	74
Висновки до 1 розділу	83
РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ СУЧАСНИХ ЗАСОБІВ НАВЧАННЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ УЧНЯМИ ЛІЦЕЮ.....	86
2.1. Концептуальна модель використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею.	86
2.2. Загальні підходи до реалізації концептуальної моделі під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею.....	93
2.3. Методичні особливості вивчення окремих класів функцій відповідно до реалізації концептуальної моделі.....	111
Показникова функція	127
2.4. Результати експериментальної перевірки ефективності розроблених методичних рекомендацій застосування сучасних засобів навчання під час вивчення учнями ліцею змістової лінії «Функції».	144
Висновки до розділу 2	160
ВИСНОВКИ	162
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	167
Додатки	188

Перелік умовних позначень

1. STEM - це акронім (скорочення) від англійських слів: Science (Наука), Technology (Технології), Engineering (Інженерія) та Mathematics (Математика).
2. ВРУ – Верховна Рада України.
3. ДПА – державна підсумкова атестація.
4. ЗЗСО – заклад загальної середньої освіти.
5. ЗНО – зовнішнє незалежне оцінювання.
6. ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології.
7. КМУ – Кабінет Міністрів України.
8. МОН – Міністерство освіти і науки.
9. НАПН України – Національна Академія педагогічних наук України.
10. НМТ – національний мультипредметний тест.
11. НУШ – Нова українська школа.
12. УЦОЯО – Український центр оцінювання якості освіти.
13. ШІ – штучний інтелект.
14. ШКМ – шкільний курс математики.

ВСТУП

Актуальність дослідження. Математична освіта є фундаментом науково-технічного прогресу, розвитку суспільства та формування компетентної, творчої особистості, здатної діяти в умовах швидких змін. У XXI столітті відбувається інтенсивна цифровізація усіх сфер життя – економіки, медицини, екології, освіти, комунікацій, що вимагає від молодого покоління не лише володіння математичними знаннями, а й уміння застосовувати їх для аналізу, моделювання та прийняття рішень у складних, динамічних ситуаціях.

Поява нових професій – аналітиків даних, фахівців з машинного навчання, еко інженерів, фінансових і технічних експертів, логістів, IT - архітекторів – свідчить про те, що сучасний ринок праці потребує високого рівня математичної грамотності, критичного мислення, здатності використовувати математичні моделі для пояснення реальних процесів. Згідно з Концепцією Нової української школи (Концепція «Нова українська школа», 2016), нині важливим пріоритетом розвитку математичної освіти є формування в учнів розуміння ролі математики, її застосування до розв’язання практичних задач, уміння аргументовано висловлювати думки та застосовувати математику для розв’язування практичних і дослідницьких завдань.

Проте результати міжнародного дослідження PISA (Лиховид, 2023) свідчать про те, що українські учні все ще мають труднощі у застосуванні набутих знань у реальних життєвих ситуаціях: понад третина учасників з України не досягли базового рівня сформованості математичної компетентності. Це свідчить про необхідність переорієнтації шкільного курсу математики з репродуктивного засвоєння теоретичного матеріалу на діяльнісний та дослідницький підходи із використанням сучасних технологій навчання.

Базовою змістовою лінією шкільного курсу математики є лінія «Функції». Вона формує в учнів: поняття про залежність між величинами; вміння аналізувати, будувати та інтерпретувати графіки функцій; досліджувати закономірності тощо. Саме вона виступає фундаментом для подальшого вивчення в математиці рівнянь, нерівностей, виразів, геометричних величин тощо, природничих наук, економіки, інформатики, програмування, тому її засвоєння має бути не лише теоретичним, а ще й практично орієнтованим.

Проведений нами ретроспективний аналіз вивчення функцій в минулі роки показав, що вітчизняні навчальні програми та підручники часто-густо залишались орієнтованими на статичне представлення матеріалу – аналітичні обчислення, шаблонні вправи, що не враховують потреб і особливостей сучасних учнів, для яких характерне візуальне сприйняття, кліпове мислення, прагнення до інтерактивності. Це знижує інтерес учнів до математики, призводить до формального засвоєння понять та втрати мотивації.

Використання сучасних засобів навчання (GeoGebra, Desmos, ClassTime, Wordwall, AhaSlides, динамічні симуляції, віртуальні лабораторії, ІІІ, динамічні графічні середовища, мультимедійні презентації тощо) відкриває нові можливості для графічного подання та моделювання реальних процесів навколишньої дійсності, сприяє розумінню зв'язку між теорією і практикою. Такі засоби сприяють не лише розвитку математичної інтуїції, але й формуванню дослідницької, проєктної, цифрової та комунікативної компетентностей учнів.

Розвиток математичної освіти в Україні відображений у низці нормативних документів: Законах України «Про освіту» (Закон України «Про освіту», 2017) та «Про повну загальну середню освіту» (Закон України «Про повну загальну середню освіту», 2020), Державному стандарті базової та профільної середньої освіти (2020) (Державний стандарт базової

середньої освіти, 2020, Державний стандарт профільної середньої освіти, 2024), Концепції НУШ (Концепція «Нова українська школа», 2016), проєкті Концепції математичної освіти 12-річної школи (Бурда та ін., 2018), які визначають необхідність оновлення змісту, форм, методів і засобів навчання відповідно до вимог цифрового суспільства.

У межах профільної освіти в ліцеї вивчення змістової лінії «Функції» є одним із наріжних каменів формування математичної компетентності, адже вимагає від учнів уміння аналізувати реальні дані, описувати закономірності за допомогою графіків, створювати математичні моделі, робити висновки. Проте недостатня сформованість науково обґрунтованої методики використання сучасних засобів навчання під час вивчення функціональної лінії зумовлює розрив між потенціалом цифрових інструментів та їх реальним застосуванням у практиці вчителя.

Таким чином, актуальність дослідження зумовлена:

- потребою оновлення методик навчання відповідно до цифрових викликів сучасності;
- необхідністю формування в учнів ліцею ключових і предметних математичних компетентностей на основі діяльнісного підходу;
- недостатньою сформованістю методики застосування сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції»;
- важливістю розвитку дослідницької, аналітичної та проєктної діяльності учнів засобами ІКТ.

Наявна суперечність між високим освітнім потенціалом сучасних цифрових засобів і відсутністю системного методичного підходу до їх використання під час вивчення функцій у профільній школі **визначає наукову проблему, що потребує розв’язання.**

Отже, недостатній рівень розробленості методики використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» в ліцеї, поєднаний зі зростаючою потребою у цифровій трансформації

математичної освіти, визначив вибір теми дисертаційного дослідження – **«Методика використання сучасних засобів навчання при вивченні змістової лінії «Функції» учнями ліцею».**

Навчальна діяльність як взагалі, так і у сфері опанування математики, є непростю, але цікавою роботою. Для досягнення результатів під час цієї роботи учням потрібен час, кваліфікований вчитель, а також значні самостійні зусилля. У процесі навчання учні мають здобути необхідні для життя компетентності, тобто навчитися мислити, розуміти суть речей, генерувати ідеї та на основі цього шукати та інтерпретувати потрібні відомості, формуючи інформацію про об'єкти та процеси реального світу та світу абстрактних ідей, а також застосовувати набуті знання, вміння і навички в конкретних умовах, формувати та відстоювати власну думку.

Роль учителя в процесі навчання полягає в постійному моніторингу діяльності учнів з метою своєчасної допомоги в подоланні труднощів у процесі набуття і закріплення належних компетентностей. Сучасна дійсність зобов'язує вчителів регулярно поповнювати та актуалізувати свої знання з комплексних питань, що становлять основу навчально-методичної діяльності та допомогти учням упоратися з проблемами в навчанні. Однак часто вчителю досить непросто сформулювати критерії та показники особистісного зростання школярів та оцінити їх. Тому під час підготовки до уроків важливо враховувати можливі учнівські помилки та вчасно їх виправляти.

Сучасна українська освіта спрямована на особистісно-орієнтоване навчання (ВРУ, 2017). Тому перед учителем постає завдання розкрити, зберегти та розвинути учня як особистість, виявляти й враховувати його потенціал, потреби, бажання та відповідно до них забезпечувати диференційований підхід до навчання. Такий підхід потребує створення в процесі навчання сучасного освітнього середовища, яке сприятиме розвитку в учнів необхідних знань, вмінь і навичок та компетентностей (здатність до

навчання, творчість, критичне мислення, комунікація, командна робота тощо), формуванню його як особистості. Для цього вчитель може використовувати не лише традиційні засоби навчання, а й сучасні освітні тренди, зокрема, STEM освіту, педагогіку партнерства, персоналізацію навчання, інклюзивне навчання, практичне навчання, дослідницьке навчання, гейміфікацію, онлайн-курси тощо (Васильєва, 2020).

Традиційно зміст шкільного курсу математики поділяють на так звані *змістові лінії*, розвиток і поглиблення яких відбувається під час усього процесу навчання шляхом розгляду відповідних тем у кожному окремому класі (КМУ, 2024). До таких змістових ліній найчастіше відносять: «Числа і вирази», «Функції та їх графіки», «Рівняння і нерівності», «Планіметрія», «Стереометрія», «Основи комбінаторики і стохастики» (УЦОЯО, 2016).

Кожна з цих змістових ліній є важливою і, мабуть, не можна виокремити якусь найважливішу з них. Однак, вивчення окремих із них починається з 1 класу, закінчується у випускному класі, а для інших вивчення починається дещо пізніше, але триває до завершення навчання. Наприклад, вивчення змістової лінії «Числа і вирази» починається з дій над натуральними числами в початковій школі, а завершується вивченням дійсних і комплексних чисел у старшій школі. Водночас змістова лінія «Функції», якщо не враховувати пропедевтичний матеріал, починає вивчатися з 7 класу темою «Лінійна функція» і завершується у випускному класі вивченням теми «Показникова та логарифмічна функції».

Зауважимо, що вдосконалення методики навчання учнів матеріалу змістової лінії «Функції» наразі є актуальною проблемою, про що свідчать публікації іноземних та вітчизняних науковців (Bakker та ін., 2021; Makonye, 2014; Васильєва, 2020; Бахрушин та ін., 2019). Підкреслимо також, що знання властивостей елементарних функцій сприяє формуванню в учнів адекватного світосприйняття на основі набутих загальних і предметних компетентностей. Без відповідних знань, умінь і навичок складно уявити

також вивчення багатьох тем із фізики, хімії, біології, інформатики тощо (Левашова, 2008). Також матеріал змістової лінії «Функції та їх графіки» є досить важливим для успішного складання зовнішнього незалежного оцінювання (далі – ЗНО) якості навчальних знань з математики, яке проводить Український центр оцінювання якості освіти (далі – УЦОЯО). Зокрема, приблизно 20% від загальної кількості завдань тесту ЗНО з математики стосуються функцій та їх графіків.

Спираючись на педагогічний досвід вчителів-практиків та результати державних підсумкових атестацій (далі – ДПА) з математики, за останні роки нами були виявлені суттєві проблеми в засвоєнні учнями 10-11 класів матеріалу змістової лінії «Функції». Про них говориться також і в підсумкових звітах УЦОЯО під час аналізу результатів тестування з математики. Зокрема, наприклад, зазначається, що: «Значна частина учасників зовнішнього незалежного оцінювання не має сформованих базових умінь та навичок з теми «Функції. Властивості функцій». Учасники тестування часто не могли правильно проаналізувати й зрозуміти зміст завдань, поданих в графічній формі (рисунок), зіставити його з текстовою частиною умови завдання, побудувати відповідну математичну модель. Здебільшого це стосувалося завдань практичного змісту як з алгебри, так і з геометрії» (УЦОЯО, 2017).

Ретроспективний аналіз офіційних звітів УЦОЯО за 2016 – 2021 роки стосовно наявності учнівських проблем із вивченням функцій (УЦОЯО, 2016; УЦОЯО, 2017; УЦОЯО, 2018; УЦОЯО, 2019; УЦОЯО, 2020; УЦОЯО, 2021) показав таке:

- в учнів відсутні навички аналізу та розуміння даних, наведених за допомогою графіка або рисунка порівнюючи їх з умовою завдання (здебільшого це стосується завдань на розпізнавання графіків функцій);

- майже половина учасників тестування не можуть визначити серед наведених точку перетину графіка функції з віссю абсцис у завданні закритого типу;
- в учнів виникають труднощі під час розв'язування завдання на встановлення відповідності між наведеними на рисунках графіками функцій та властивостями цих функцій;
- учні не можуть правильно знайти область визначення функції і обчислити значення функції в заданих точках області визначення;
- учні не можуть правильно побудувати графік функції під час виконання завдання з розгорнутою відповіддю (із повним поясненням);
- учні не можуть правильно визначити похідну функції та за цими даними знайти проміжки монотонності, точки екстремуму функції;
- учні не розуміють геометричного змісту визначеного інтеграла й припускаються помилок під час визначення первісної функції, при обчисленні площі геометричної фігури за допомогою формули Ньютона – Лейбніца;
- із завданням відкритої форми з розгорнутою відповіддю, повністю змогли впоратися лише від 1,7 % до 9,4 % учасників тестування, а зовсім не виконували це завдання від 40,3 % і більше учасників.

Аналіз статистичних характеристик тестових завдань, що стосуються матеріалу змістової лінії «Функції» показує, що учасники тестування ЗНО з математики недостатньо та фрагментарно обґрунтовують отримані висновки, часто не можуть зв'язно, логічно та послідовно записати хід своїх думок, не вміють використовувати набуті знання та навички для аналізу та синтезу отриманих результатів (УЦОЯО, 2016).

У 2018 році Україна брала участь у Міжнародному порівняльному дослідженні PISA, під час якого було виявлено, що середній рівень математичної грамотності українських школярів (453 бали) відповідає другому рівню з шести можливих (Бахрушин, 2019). Цей рівень є базовим,

що відображає вміння учнів брати ефективну і продуктивну участь у житті суспільства. Бали PISA визначаються на спеціально розроблених для кожної галузі дослідження шкалах – для читання, математики та природничо-наукових дисциплін.

Шкали є числовим показником рівнів сформованості в учнів грамотності у відповідних галузях. Для кожного рівня є певна кількість тестових завдань, де поступово зростає складність завдань на кожному із рівнів. Сума отриманих учнем балів дає змогу визначити рівень його компетентності у відповідних дисциплінах. Результати учасників PISA з кожної галузі подаються на шкалі, на якій визначено шість рівнів сформованості грамотності за кожною з предметних галузей оцінювання (Лиховид, 2023).

Порівняння результатів українських учнів з результатами учнів інших країн-учасниць показало, що в Україні найбільш проблемною серед трьох галузей PISA є математика, помітні відмінності у різних предметних галузях, особливо помітні відносно низькі результати учнів із математики. 36% українських учнів не змогли продемонструвати середній рівень математичної грамотності українських школярів, з них 15,6% не досягли навіть першого рівня математичної грамотності. Водночас близько 38% українських учасників тестування показали результати 3-6 рівнів, але лише одиниці з них потрапили до шостого рівня (Бахрушин та ін., 2019).

У дослідженні PISA з теми «Функції» приділено увагу лінійним функціям, їх властивостям, різним формам опису та завдання. В наступному дослідженні PISA за 2022 рік було ширше досліджено залежність між величинами, що може бути виражена за допомогою рівнянь, графіків, таблиць або вербальних описів. Досліджене поняття функції як такої, тобто як такого абстрактного об'єкта, представленнями якого і виступають різноманітні рівняння, графіки, таблиці чи описи. Два погляди на функцію – наївний погляд як на процес і більш абстрактний погляд як на об'єкт –

можуть бути узгоджені між собою в графіку функції. Разом із тим аналіз графіка функції, визначення координат величин на осях також мають динамічний або процесний характер. Графік функції є важливим інструментом для дослідження поняття швидкості змін. Графік постає таким собі візуальним засобом для усвідомлення функції як залежності між пов'язаними величинами (Вакуленко, 2021). Саме це дослідження вказує на наявність проблеми вивчення змістової лінії «Функції», показує міжпредметні зв'язки даної лінії та актуальність її вивчення (Года & Школьный, 2022).

Підсумовуючи, бачимо, що учні українських шкіл мають суттєві проблеми із засвоєнням матеріалу змістової лінії «Функції». Лише той факт, що за даними статистичних звітів УЦОЯО у 2016 – 2021 роках завдання на встановлення відповідності між функцією та властивістю функції виконують правильно лише від 16,2% до 28,8% учасників тесту ЗНО з математики, свідчить про нагальну потребу вдосконалення методики навчання учнів матеріалу даної змістової лінії.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики учнів старшої школи (ліцею).

Предмет дослідження – методика системного використання сучасних засобів навчання на уроках алгебри і початків аналізу під час вивчення функцій у старшій профільній школі (ліцеї).

Мета дослідження – проаналізувати і дослідити доцільність, можливість використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею; теоретично обґрунтувати, розробити та експериментально перевірити методику системного використання сучасних засобів навчання на уроках алгебри і початків аналізу під час вивчення теми «Функції».

Завдання дослідження:

1. Вивчити стан розроблення обраної для дослідження проблеми в світовій та вітчизняній методичній та психолого-педагогічній науці.
2. Установити особливості сучасних засобів навчання, чинники, що впливають на вибір засобів навчання.
3. Створити концептуальну модель використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею.
4. Розробити методичні рекомендації для вчителів математики ЗЗСО, викладачів закладів фахової передвищої освіти та закладів неперервної освіти вчителів щодо використання сучасних засобів навчання під час вивчення теми «Функції» учнями ліцею.
5. Розробити і експериментально апробувати в освітньому процесі учнів ліцею: добірку задач практичного змісту, що стосуються змістової лінії «Функції»; динамічні моделі та онлайн-завдання, що забезпечують розвиток графічної інтуїції й аналітичного мислення учнів; квести, проєкти, навчальні кейси та інші засоби навчання, що сприяють ефективному вивченню функцій здобувачами освіти.
6. Експериментально перевірити ефективність створеної методики застосування сучасних засобів навчання під час вивчення теми «Функції» учнями ліцею.

Гіпотеза дослідження – формування математичної компетентності учнів ліцею під час вивченні змістової лінії «Функції» буде ефективним, якщо:

- 1) освітній процес буде організовано на основі діяльнісного та компетентнісного підходів із врахуванням пропонованої в роботі авторської концептуальної моделі;
- 2) у процесі навчання системно використовуватимуться сучасні цифрові засоби навчання (GeoGebra, Desmos, Wordwall, ClassTime, AhaSlides, Canva,

AI-інструменти тощо) та створені з їх використанням авторські дидактичні матеріали для учнів ліцею;

3) методика побудови уроків передбачатиме інтерактивність, візуалізацію, дослідницьку діяльність і моделювання реальних процесів, як запропоновано в дослідженні;

4) учитель математики виступатиме як модератор навчальної взаємодії, забезпечуючи підтримку індивідуальної освітньої траєкторії кожного учня відповідно до авторської методики.

Методи дослідження

Теоретичні методи:

- аналіз філософської, психолого-педагогічної, методичної та нормативної літератури;
- узагальнення та систематизація теоретичних положень щодо використання сучасних засобів навчання;
- створення концептуальної моделі навчання змістової лінії «Функції».

Емпіричні методи:

- педагогічне спостереження, бесіди, анкетування вчителів і учнів;
- педагогічний експеримент (констатувальний, пошуковий та формувальний);
- аналіз результатів навчальної діяльності учнів, тестування та порівняльний аналіз успішності;
- статистична обробка отриманих результатів.

Наукова новизна

Розроблено:

- нову авторську методику системного використання сучасних засобів навчання у процесі вивчення функцій у профільній старшій школі;
- запропоновано авторську концептуальну модель інтеграції ІКТ у навчальний процес, що забезпечує поєднання аналітичного, візуального та дослідницького підходів;

- визначено педагогічні умови ефективного застосування сучасних засобів навчання у процесі формування математичної компетентності учнів для формування функціонально-графічних умінь і навичок.

Удосконалено:

- методику застосування діяльнісного підходу в навчанні в математики під час вивчення змістової лінії «Функції»;
- методику створення мультимедійних завдань для вивчення функцій;
- методику використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції», зокрема, для оцінювання рівня сформованості математичної компетентності учнів ліцею.

Набули подальшого розвитку:

- теоретичні та практичні дослідження щодо реалізації міжпредметної інтеграції під час вивчення функцій у старшій профільній школі;
- способи формування інформаційно-цифрової компетентності учнів засобами математики.

Особистий внесок здобувача

Автором самостійно:

- здійснено аналіз теоретичних джерел і стану проблеми; розроблено концептуальну модель використання сучасних засобів навчання у вивченні функцій;
- створено методичні рекомендації для вчителів математики;
- організовано і проведено педагогічний експеримент;
- оброблено результати експериментальних досліджень і зроблено висновки.

Апробація і впровадження результатів дослідження

Основні результати дослідження апробовано:

- на міжнародних і всеукраїнських конференціях (Суми, 2021; Чернігів, 2022; Київ, 2023; Черкаси, 2023; Суми, 2024; Київ, 2025);

- під час виступів і обговорень на засіданнях кафедри методики навчання математики УДУ імені Михайла Драгоманова;
- під час навчально-методичної роботи у ліцеях;
- у процесі педагогічного експерименту в закладах освіти м. Києва у 2021–2026 рр.;
- шляхом створення авторських динамічних матеріалів (моделей у GeoGebra та Desmos, цифрових вправ Wordwall, AhaSlides, Google Sites тощо).

Публікації за темою дослідження

1. Года Т., Школьный О. Про доцільність і напрямки вдосконалення методики навчання учнів матеріалу змістової лінії «Функції та їх графіки». // Фізико-математична освіта, 2022, № 3(35), С. 13–18.
2. Года Т. Використання штучного інтелекту при підготовці вчителя до уроків, присвячених вивченню функцій у старшій профільній школі. // Актуальні питання природничо-математичної освіти, 2024, № 2(24).
3. Hoda T. Methodological approaches to overcoming learning losses in the topic “Logarithmic function” through interactive learning tools. // ScienceRise: Pedagogical Education, 2025, № 3(64), P. 66–70.
4. Года, Т. (2026). Мотиваційні задачі для вивчення теми «Функції» учнями ліцею. Дидактика математики: теорія, досвід, інновації, 5, 36-49. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2026-5-36-49>

Структура і обсяг роботи. Дисертаційне дослідження складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел (176 найменувань) і 16 додатків. Основний зміст роботи викладено на 151 сторінці, який містить 8 таблиць і 19 рисунків. Повний обсяг дисертації становить 222 сторінки.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Ретроспективний аналіз вивчення змістової лінії «Функції» в Україні

1.1.1. Еволюція цілей і змісту вивчення функцій в українській школі.

Цілі та зміст вивчення функцій в українській школі були завжди актуальною темою, і в наукових дослідженнях, і в практиці навчання математики. Еволюція вивчення цієї теми відбувалася протягом тривалого часу і мала вплив на загальний зміст та цілі навчання. Вивчення функцій залежало від освітніх вимог та було пов'язане з етапами розвитку математики та освіти загалом. Трансформація освітньої системи України була детермінована її суспільно-політичним та соціокультурним статусом.

До 20-х років XX століття на території сучасної України функції вивчалися в гімназіях (Стрілецька, 2012) на елементарному рівні з метою підготовки до навчання у вищих навчальних закладах. Як зазначено в підручнику (Левицький та Огоновський, 1905), у цей період функція розглядалася як кількісна залежність між змінними величинами, що відповідало тогочасним європейським поглядам. Згодом, у процесі модернізації математичної освіти, підходи до введення поняття функції в школі змінювалися: відбувалося поступове наближення шкільного означення цього поняття до означення, притаманного університетським курсам математики.

У першій половині XX ст. трансформація змісту математичної освіти в Україні визначалася переходом від класичної гімназійної моделі до радикальних методологічних експериментів радянського періоду. До початку 1930-х років провідною була тенденція до деформації предметної системи: навчальний процес базувався на комплексних програмах та методі проєктів (Гайдей & Міхно, 2019). У межах моделі навчання математичний матеріал, що охоплював арифметику, алгебру, елементи евклідової

геометрії та тригонометрії, вивчався фрагментарно – виключно у контексті його прикладного застосування для розв’язання трудових і суспільних завдань (Abramov & Karp, 2010).

Орієнтація на вивчення локального середовища та впровадження краєзнавчого компонента стали наслідком децентралізації навчального процесу, яка стимулювала педагогів до розробки регіональних навчальних посібників (Kramarenko et al., 2020). Проте відмова від логічно послідовного викладу теоретичних основ математики на користь утилітарних проєктів спричинила суттєве зниження рівня загальноосвітньої підготовки учнів. Подолання таких кризових явищ відбулося шляхом відновлення системно-предметного принципу навчання у 1930–1940-х роках. Остаточне закріплення цих змін відбулося у 1950-х роках, коли була сформована єдина державна система шкільної освіти, що охоплювала школи робітничої й сільської молоді, школи-інтернати та технічні училища (Левківський, 2011).

З 1964 р. почалось розроблення нових програм. У 1968 р. було опубліковано нову програму з математики для середньої школи (з’явилися нові теми: поняття множини, операції над множинами, границя функції, похідна, інтеграл, поняття про найпростіші диференціальні рівняння, вектори, геометричні перетворення, елементи аналітичної геометрії). Було введено посібник «Алгебра і елементарні функції» до якого увійшли теми «Границя функції» та «Похідна» (Кочетков & Кочеткова, 1968). Змінився підхід до вивчення традиційних понять, ідей і методів. У 5 класі розглядалася система координат (Слепкань, 2006), а поняття функції в сучасному його трактуванні вводилося в 6 класі: «Відповідність між множинами X і Y , за якої кожному елементу першої множини X відповідає єдиний елемент другої множини Y називається функцією» (Маркушевич, 1971). Далі передбачалося систематичне вивчення властивостей елементарних функцій ($y = kx + b$, $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2 + bx + c$).

Після введення програми 8-річної школи (ВР УРСР, 1959), які містила курс математики для 4-5 класів, а також алгебру та геометрію для 6-8 класів, в основі якої переважав практичний зміст (суспільно-корисна праця), було визначено політехнічну спрямованість – напрям вивчення математики, який був направлений на опанування геометричних побудов, теорії множин, рівняння та нерівності. Значна увага в програмі приділялася функціям (лінійна, квадратична, степеневі з цілим показником, показникова, логарифмічна та тригонометричні). Основною метою було формування в учнів наочно-графічних уявлень і обчислювальних навичок, а також їх умінь працювати з таблицями наближених обчислень значень функцій (Брадів, 2011). Навчалися за підручниками Макаричева Ю. М. (Макаричев та ін., 1973), Колмогорова А.М. (Колмогоров и др., 1976) та ін.

Також у 1970-х роках було здійснено реформування змісту математичної освіти у 9-10 класах середніх шкіл (Рада Міністрів УРСР, 1972), яка в широких колах фахівців дістала назву «реформа Колмогорова», оскільки саме академік Андрій Миколайович Колмогоров очолив колектив авторів програм з математики та підручників до них у межах цієї реформи (Neretin, 2019). Згідно з цією реформою повністю зберігалось наявне на той момент завдання навчання математики: забезпечити міцне і свідоме оволодіння учнями математичними знаннями і навичками, які потрібні у повсякденному житті і праці кожного члена сучасного суспільства і достатні для вивчення у школі інших дисциплін, для продовження навчання (Міністерство освіти УРСР, 1982).

У цей час у підручниках з математики з'являється теоретико-множинний підхід до вивчення функції («Величина y називається функцією змінної величини x в області визначення D , якщо кожному x із цієї області відповідає одне певне значення величини y » (Бевз, 1989), масово у звичайних школах починають вивчати похідну та інтеграл. Зокрема, у 9 класі виділено тему «Похідна і її застосування» де разом із поняттям

похідної розширюють вивчення властивостей функції (Міністерство освіти УРСР, 1982). Вивчають зростання та спадання функцій за допомогою приросту, розглядається середня швидкість зміни функції на деякому проміжку, границя середньої швидкості зміни функції в точці, неперервність функції. Також цей навчальний рік містить окрему тему «Елементи тригонометрії» в яких вивчають визначення чотирьох функцій – синус, косинус, тангенс, котангенс. Детально розглядають властивості цих функцій: проміжки зростання та спадання, найбільше і найменше значення, парність, непарність та періодичність, неперервність. У 10 класі продовжують досліджувати похідну використовуючи її для дослідження функцій. Вивчається тема «Показникова, логарифмічна і степенева функції», розглядаються прикладне застосування цих функцій, логарифмічна лінійка (Міністерство освіти УРСР, 1982).

Крім того, в 9–10 класах, навчальні програми передбачали поглиблене вивчення матеріалу, що стосується функцій (зокрема, показникових і логарифмічних функцій, що мають численні практичні застосування), із посиленням теоретичної складової та орієнтацією на вивчення елементів математичного аналізу. Вивчення властивостей функцій майже не змінюється з попередніми навчальними програмами, але доповнюється множинною символікою. При цьому розглядаються проміжки монотонності функції, точки екстремуму та екстремуми функції, асимптоти графіків функцій, неперервність функції, точки розриву функцій, обмеженість та необмеженість функцій.

Новий етап модернізації шкільної освіти розпочався у 1989 році із впровадженням 11-річної школи (Bogatchuk & Bogatchuk, 2024). Зазнає незначних змін навчальна програма: вивчення квадратних коренів, функції $y = \frac{1}{x}$ здійснюється у 8 класі (Бевз, 1989). У 9 класі вивчається квадратична функція, найпростіші перетворення графіків функцій, парні та непарні функції, функції $y = x^n$, $y = \sqrt[n]{x}$ де n - натуральне та $y = x^r$, $r \in R$. 10 та 11

класи мають предмет «Алгебра і початки аналізу». 10 клас розпочинається із числових функції та їх графіків, їх елементарного дослідження. У 11 класі вивчають показникову, степеневу та логарифмічну функції (Міністерство народної освіти УРСР, 1989).

У незалежній Україні, починаючи з 1991 року, вивчення функцій у шкільному курсі математики поступово орієнтується на актуальні на той час педагогічні підходи та використання інформаційно-комунікаційних технологій (Березівська та ін., 2022). Такі зміни зумовлювалися демократизацією освіти, інтеграційними процесами України в європейський освітній простір і зміною суспільних вимог до результатів математичної освіти. Після проголошення незалежності Україна почала довгий шлях реконструкції шкільної математичної освіти. Головним центром змін у змісті, стандартах, методах, розробці навчальних програм стала Національна Академія педагогічних наук України (далі - НАПН України). Саме вона разом із вчителями та Міністерством освіти України (далі - МОН України) вносили зміни в систему освіти. Були внесені зміни у цілі навчання, методи навчання, організаційні форми навчання та засоби навчання математики.

У 1991 році виходить друком програма середньої загальноосвітньої школи з математики для 5-11 класів (Міністерство народної освіти УРСР, 1991). Зміст навчальної програми майже не змінюється, в порівнянні з *Програмою з математики для середньої школи* (МОН УРСР, 1982). У 7-9 класах вивчають поняття функції та її графіка, способи задання функцій та властивості функцій: область визначення, множина значень, проміжки зростання і спадання, парність та непарність. Перелік елементарних функцій також залишається незмінним порівняно з попередніми програмами (за виключенням модуля): $y = kx$, $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{k}{x}$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$. У 10-11 класах програма з математики

(Міністерство народної освіти УРСР, 1991) не зазнає змін порівняно з попередньою програмою.

Оновлення змісту математичної освіти продовжується в 1996 році. Запроваджуються 2 навчальних програми з математики: програма для середніх загальноосвітніх шкіл (Міністерство освіти України, 1996а) і програма для спеціалізованих шкіл, профільних ліцеїв, гімназій (Міністерство освіти України, 1996б). У програмі для середніх загальноосвітніх шкіл у 7 класі в темі «Функції» (15 годин) вводиться поняття функції, способи задання функції, поняття графіка функції та вивчається лінійна функція. 8 клас окремої теми, що стосується функцій, не містить, але у темі «Раціональні дроби» (30 годин) вивчають функцію $y = \frac{k}{x}$ та її графік, а в темі «Квадратні корені» (22 години) функцію $y = \sqrt{x}$. 9 клас містить тему «Квадратична функція» (27 годин) та «Степінь з раціональним показником» (12 годин) у яких вивчаються відповідно функції $y = ax^2 + bx + c$ та $y = x^n$.

Починаючи з другої половини 1990-х років, зокрема після затвердження навчальних програм з математики 1996 року (Міністерство освіти України, 1996), у старшій школі України (10–11 класи) було впроваджено кілька авторських ліній підручників, які реалізовували зміст згаданих програм і відображали різні методичні підходи до вивчення змістової лінії «Функції».

У підручниках українських авторів М. І. Шкіля, З. І. Слєпкань та О. С. Дубинчук (Шкіль, Слєпкань, & Дубинчук, 2001, 2002) значну частину змісту 10 класу присвячено вивченню функціональних залежностей, зокрема тригонометричних, степеневих, показникових і логарифмічних функцій. У 11 класі функціональна лінія розширюється за рахунок введення понять границі та неперервності функції, а також похідної й елементів інтегрального числення, які застосовуються до основних елементарних функцій, вивчених у 10 класі.

Окрему авторську лінію становлять підручники Г. П. Бевза (Бевз, 2001, 2002), у яких збережено звичну для підручників А. М. Колмогорова структуру вивчення функцій у старшій школі. Зокрема, у 10 класі передбачено систематичне вивчення тригонометричних функцій, а у 11 класі – тем, пов'язаних зі степенями і степеневими функціями, а також показниковою та логарифмічною функціями. Подання матеріалу орієнтоване на поєднання алгебраїчних і графічних способів дослідження функцій та поступове формування елементів аналітичного мислення учнів.

Відповідно до програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів (Бевз, Мерзляк, & Слєпкань, 2003), реалізованої у підручниках Г. П. Бевза, зміст навчального матеріалу має низку відмінностей. Згідно з програмою (Бевз, Мерзляк, & Слєпкань, 2003) у 8 класі вивчають тему «Функції» (16 годин), тобто функцію, її аргумент і числові значення, область визначення функції, способи задання функцій, графік, лінійну функцію, пряму пропорційність, обернену пропорційність, функції $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$, квадратичну функцію. У 9 класі в темі «Функції та їх графіки» (30 годин) повторюють основні відомості про функцію, вивчають перетворення графіків функцій, квадратичну функцію, зростаючі та спадні функції, парні та непарні функції, а також найпростіші степеневі функції та їх властивості.

Процес модернізації розпочався із прийняттям Постанови Кабінету Міністрів України від 16 листопада 2000 р. № 1717 (КМУ, 2000), якою було затверджено перехід на 12-річну структуру загальної середньої освіти. На виконання цієї стратегії у 2002 році Інститут педагогіки АПН України розробив проєкт «Концепція математичної освіти 12-річної школи» (Інститут педагогіки АПН України, 2002), що визначив нові змістові пріоритети. На основі цих документів у 2005 р. було впроваджено оновлені навчальні програми з математики (МОН України, 2005). У них вже простежуються елементи гнучкості навчального процесу: програма

визначала обов'язковий державний мінімум, проте вчитель отримував право самостійно розподіляти години між темами та вводити додатковий матеріал. Також на цей період уже діяла запроваджена у 2000 році 12-бальна система оцінювання, яка стала ефективним інструментом стимулювання навчальних досягнень учнів. Таким чином, на вчителя математики було покладено високу відповідальність за формування системи знань та творчий розвиток особистості відповідно до вимог нової 12-річної школи.

Згідно зі згаданими програмами, у 1-7 класах здійснюється пропедевтика вивчення поняття функції. Вона реалізується у зв'язку з вивченням залежностей результатів арифметичних дій від компонентів, обчисленням значень буквених виразів за даним значенням однієї з букв, розв'язуванням текстових задач за допомогою рівнянь, діаграм, введенням у 6 класі координатної площини та побудови графіків залежностей між величинами. Проте термін «функція» на цьому етапі ще не застосовується. Поняття функції, області визначення та області значень, способів задання функцій, їх графіків запроваджується під час вивчення курсу алгебри у 8 класі. Тут також розглядають окремі види функцій: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$, їх графіки та властивості. Властивості читаються за заздалегідь побудованим графіком і аналітично не доводяться (учні ще не знайомі з означенням зростаючої, спадної, парної та непарної функцій). У 9 класі вивчають квадратичну функцію, побудову її графіка методом геометричних перетворень, які на цей час вже мають бути вивчені в курсі геометрії. Учні вчаться розв'язувати нерівності другого степеня з однією змінною, зокрема графічним способом, використовуючи графік квадратичної функції. До теми «Функції» належать і числові послідовності як функції натурального аргументу. Проте ця тема передбачає вивчення здебільшого формул n -го члена і суми перших n членів прогресій та розв'язування задач на прогресії, зокрема прикладних. Функції синус, косинус, тангенс, хоча і вивчають у курсі геометрії 8 класу, але тут

функціями ще не називають. Їх означають як відношення сторін прямокутного трикутника і відповідних відрізків у колі радіуса R (координатний метод означення цих відношень). Проте і тут відбувається функціональна пропедевтика, оскільки доводиться, що синус і косинус не залежать від довжини сторін прямокутного трикутника, а залежать лише від величини кута. У 10 класі перед вивченням тригонометричних функцій передбачено розширення відомостей про функцію (зростаючі, спадні, парні, непарні, періодичні) та на основі введених означень аналітичне доведення властивостей усіх раніше розглянутих функцій, а також передбачено вивчення степеневі, показникової та логарифмічної функцій.

Починаючи з 2004 року, цілі та зміст навчання визначаються Державним стандартом базової і повної середньої освіти (КМУ, 2004). У цьому Державному стандарті основною метою та завданнями математики стали (КМУ, 2004):

- опанування учнями системи математичних знань, навичок і умінь, необхідних у повсякденному житті та майбутній трудовій діяльності, достатніх для успішного оволодіння іншими освітніми галузями знань і забезпечення неперервної освіти;
- формування в учнів наукового світогляду, уявлень про ідеї й методи математики, її роль у пізнанні дійсності;
- інтелектуальний розвиток учнів (логічного мислення і просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, пам'яті, уваги, інтуїції);
- економічне, екологічне, естетичне, громадянське виховання, формування позитивних рис особистості (КМУ, 2004).

На основі визначених цілей та завдань були виділені змістові лінії, на яких формувався зміст шкільного курсу математики. Де окремо в основній та старшій школі виділена змістова лінія «Функції» (Додаток Е).

Освітня система України постійно вдосконалювалася та підлаштовувалася до суспільних. Була здійснена спроба ввести 12-річне навчання та старшу профільну школу. Але труднощі становлення демократії в Україні привели до скасування 12-річної школи. Зміни в той час відбувалися доволі швидко: у 2008 р. затверджено переорієнтацію спрямування вивчення математики в бік прикладного її застосування; у 2009 році затверджують концепцію профільного навчання в старшій школі, але повної реалізації вона не досягає, відбувається відмова від 12 - річного навчання; у 2011 р. створюється Концепція профільного навчання в старшій школі (Бевз, 2019).

Подальший розвиток освітніх змін зумовив ухвалення 23 листопада 2011 року нового Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти (КМУ, 2011), в якому змінилися мета та завдання вивчення математики. Основною метою освітньої галузі «Математика» є формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для забезпечення життєдіяльності в сучасному світі, успішного оволодіння знаннями з інших освітніх галузей у процесі шкільного навчання, забезпечення інтелектуального розвитку учнів, розвитку їх уваги, пам'яті, логіки, культури мислення та інтуїції. Введення цього Державного стандарту (КМУ, 2011) призвело до змін у державних вимогах до рівня загальноосвітньої підготовки учнів (Додаток Ж).

З 2016 року розпочалося нове реформування системи освіти в Україні. Ідеологія змін освітньої системи в Україні розкрита в Концепції Нової української школи (КМУ, 2016) Це довгострокова реформа, яка передбачає три фази, що повинні здійснюватися послідовно (2016-2018; 2019-2022; 2023-2029) з урахуванням суспільних змін. Перша фаза цієї реформи завершилася. Затверджений Державний стандарт початкової освіти (КМУ, 2018); покладено початок роботи початкової школи за новим освітнім стандартом; переглянуті навчальні плани й програми для основної та

старшої школи з метою їх розвантаження. Зміни торкнулися не тільки мети й змісту навчання математики в школі, а й організації освітнього процесу (Бевз, 2019).

У 2017 році був відновлений перехід на 12-річну школу, затверджений план розвитку української освіти, прийнятий новий Закон України «Про освіту» (ВРУ, 2017), який сприяє входженню системи освіти в європейський і світовий освітній простір, згідно з освітньо-кваліфікаційними рівнями і ступенями освіти, приєднанню до Болонського процесу. Реалізація мети базової середньої освіти стала ґрунтуватись на ціннісних орієнтирах (додаток І).

Нормативно-правові засади реалізації концепції «Нова українська школа» у другому циклі загальної середньої освіти визначає Державний стандарт базової середньої освіти (КМУ, 2020), затверджений постановою Кабінету Міністрів України № 898 від 30 вересня 2020 р. Концептуальною особливістю документа є зміщення акцентів від знаннєво-центричної парадигми до компетентнісного підходу, що передбачає детермінацію результатів навчання через систему 11 ключових компетентностей. Відповідно до положень Державного стандарту (КМУ, 2020), освітній процес спрямовується на формування цілісного світогляду учня, розвиток критичного мислення та здатності до практичного застосування математичних знань в умовах цифровізації суспільства.

Згідно з Державним стандартом базової середньої освіти, метою математичної освітньої галузі є розвиток особистості учня через формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі; розвиток логічного мислення та психічних властивостей особистості; розуміння можливостей застосування математики в особистому та

суспільному житті. Вимоги до обов'язкових результатів навчання учнів з математичної освітньої галузі передбачають, що учень:

- досліджує проблемні ситуації та виокремлює проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів;
- моделює процеси і ситуації, розробляє стратегії, плани дій для розв'язання проблем;
- критично оцінює процес і результат розв'язання проблем;
- розвиває математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіє математичною мовою.

За вимогами Державного стандарту базової середньої освіти визначення змісту освіти для кожної з математичних галузей покладено на авторські модельні програми. На сьогодні для 5-6 класів є 7 модельних програм (Беденко та ін., 2021; Бурда & Васильєва, 2021; Василичин та ін., 2021; Істер, 2021; Мерзляк та ін., 2021; Радченко та Зайцева, 2021; Скворцова та Тарасенкова, 2021). Для 7-9 класів є дві програми інтегрованого курсу «Математика» (Василишин та ін., 2023; Істер, 2023), чотири програми для алгебри (Бурда та ін., 2023; Істер, 2023; Мерзляк та ін., 2021; Біляніна та ін., 2023) та шість програм з геометрії (Бурда та ін., 2023; Мерзляк та ін., 2021; Істер, 2023; Панченко, 2023; Генденштейн та Жемчужкіна, 2023; Біляніна та ін., 2023). Відмінності між цими модельними програмами можна переглянути в додатку М.

Наступним етапом реформування освіти згідно з концепцією НУШ стало затвердження у 2024 році Державного стандарту профільної середньої освіти (10–12 класи, а також заклади професійної та фахової передвищої освіти в частині здобуття повної загальної середньої освіти), який був ухвалений постановою Кабінету Міністрів України від 25 липня 2024 року № 851 і який буде застосовуватися з 1 вересня 2027 року (КМУ, 2024). У цьому Державному стандарті метою математичної освітньої галузі визначено розвиток особистості здобувача освіти через формування

математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі; розвиток логічного мислення та психічних властивостей особистості; здатність і готовність застосувати математику в особистому та суспільному житті для продовження навчання або фахової самореалізації. Ціллю вивчення функцій стало формування в учнів ключових компетентностей (математична, цифрова, навчальна, громадянська тощо), розвиток творчого потенціалу особистості, підготовка до життя в інформаційному суспільстві. Вимоги до обов'язкових результатів навчання здобувачів освіти з математичної освітньої галузі передбачають, що здобувач освіти: досліджує ситуації та виокремлює проблеми, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів; моделює процеси і ситуації, розробляє стратегії, плани дій для розв'язання проблемних ситуацій; критично оцінює процес і результат розв'язання проблемних ситуацій; розвиває математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіє математичною мовою (додаток П).

Підсумовуючи вище викладене приходимо до наступних висновків.

1. Загалом, еволюція змістової лінії «Функції» в ШКМ відображає постійну зміну вектора навчання математики: від вираженого прагматизму й прикладної спрямованості до академічного теоретизму. Спостерігаються певні коливання між строгим науковим підходом, що забезпечує фундаментальність знань, та пошуком ефективних механізмів їх практичної реалізації. Така динаміка трансформацій свідчить про безперервний процес адаптації шкільної математичної освіти до суспільних запитів, який спрямований на досягнення балансу, за якого глибоке розуміння теоретичних засад функціональних залежностей стає інструментальною

базою для вирішення складних прикладних завдань у сучасному високотехнологічному світі.

2. Еволюція цілей і змісту вивчення функцій в українській школі містить послідовний перехід від фрагментарного, здебільшого утилітарного розгляду окремих функціональних залежностей до цілісної, системно вибудованої функціональної лінії, інтегрованої у всі ланки загальної середньої освіти. Якщо в дореформений та ранній радянський періоди функції переважно слугували інструментом для розв'язування окремих задач і підготовки до подальшого навчання, то з реформами 1960 –1980-х років (запровадження курсу «Алгебра і початки аналізу», поглиблених програм) відбувається істотне теоретичне насичення змісту: систематично вивчаються елементарні функції, вводяться поняття границі, похідної, інтеграла, розширюється спектр застосувань.

3. З проголошенням незалежності України змістова лінія «Функції» в курсі математики закріплюється на рівні державних стандартів (2004, 2011, 2018, 2020, 2024 роки) і навчальних програм, у яких функція розглядається вже не лише як базове математичне поняття, а як засіб формування математичної компетентності, розвитку критичного мислення і здатності до моделювання реальних процесів. Сучасні модельні навчальні програми, спираючись на компетентнісний, особистісно орієнтований та діяльнісний підходи, посилюють прикладний, міжпредметний та світоглядний потенціал вивчення функцій, що засвідчує перехід від знаннєвої до компетентнісної парадигми шкільної математичної освіти.

1.1.2. Еволюційні зміни у методиці вивчення змістової лінії «Функції» в українській школі.

Методика навчання математики та зокрема методика вивчення змістової лінії «Функції» є важливими для української освіти. Проблема постійно є актуальною у зв'язку з еволюцією освітніх програм. Її

досліджували (питання змісту навчання функцій математики) такі методисти: Peter K. Dunn та Margaret F. Marshman (Dunn & Marshman, 2019), Т. В. Колесник (Шкіль & Хмара, 2000), Є.П. Нелін (Нелін, 2018), З.І. Слєпкань (Слєпкань, 2006), М. І. Шкіль (Шкіль, Колесник & Хмара, 1992), О.І. Папач (Акименко та ін., 2024), Н. В. Бахмат (Бахмат, 2021), І. В. Лов'янова (Лов'янова, 2022), Л.О. Соколенко (Соколенко, 2017) та ін. Вивченню функцій присвячені дисертаційні роботи Н. М. Шунди (Шунда, 1996), В. К. Кірмана (Кірман, 2010) та ін. Питанням організації навчання функцій та технології їх навчання присвячені роботи М. І. Жалдака (Жалдак та ін., 2003), Г.О. Михаліна (Михаліна, & Деканов, 2010), Л. О. Соколенко (Соколенко, 2018), В. О. Швеця (Соколенко & Швець, 2013), І. В. Лов'янової (Лов'янова, 2016) та ін.

У старшій школі (10-11 клас) функціональна лінія є важливою в курсі «Математика» (для рівня стандарт) та «Алгебра і початки аналізу» (для профільного рівня). У процесі вивчення згаданих курсів, варто приділяти увагу функціональній спрямованості цього курсу, тобто вивченню змістової лінії функції та її прикладному застосуванню. Впродовж усього шляху становлення української шкільної освіти, ця тема зазнавала змін, еволюціонувала відносно викликів часу та потреб суспільства. Такі зміни відбувалися в кілька етапів, кожен з яких характеризується певними особливостями в підходах до викладання, використанням нових методичних прийомів та адаптацією до сучасних вимог освіти.

Радянський період (до 1991 року)

Підручники та програми: основний акцент робився на вивченні основних елементарних функцій (лінійна, квадратична, степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні, обернені тригонометричні) з детальним вивченням їх графіків, властивостей і застосувань. Програми були жорстко регламентовані (Рада Міністрів УРСР, 1966; Рада Міністрів

УРСР, 1984), і всі учні навчалися за однаковими підручниками (наприклад, Колмогоров та ін., 1987).

Методи, форми та засоби навчання: вивчення функцій було переважно теоретичним, з акцентом на запам'ятовування формул та алгоритмів. Вчителі використовували переважно пояснювально-ілюстративний метод для подачі теоретичного матеріалу, розв'язували задачі в режимі діалогу для формування вмінь і навичок, пропонували учням самостійні і контрольні роботи для реалізації функції контролю.

Українські школи використовували найбільш поширену методику, програму та підручники. Розглянемо, як вивчались функції в той період. За програмою (Міністерство освіти УРСР, 1975) у 9-10 класах вивчались тригонометричні функції, показникова, логарифмічна та степенева функції. Розглянемо для прикладу особливості вивчення показникової функції за згаданою програмою та підручником (Колмогоров та ін., 1976).

Показникову функцію учні вивчали ще у 8 класі. А уже у 10 вводиться нове позначення $\exp_a(x): a^x = \exp_a(x)$, де $\exp_a(x)$ – показникова функція з основою a . Далі розглядається графік для цієї функції (рис. 1.1).

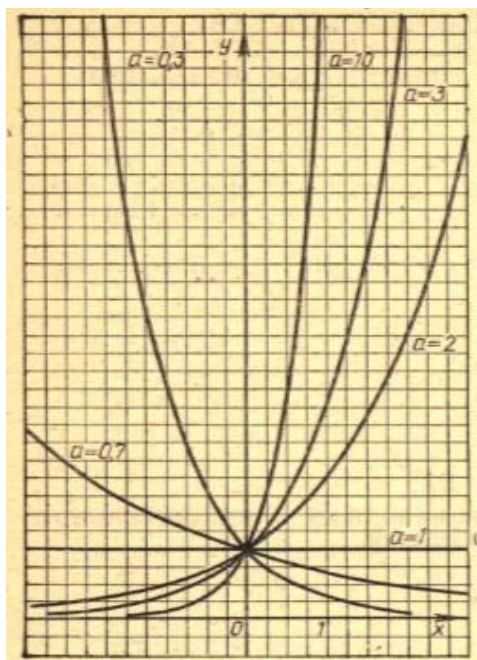


Рис. 1.1. Графік $a^x = \exp_a(x)$.

Після розгляду графіка показникової функції з різними основами подаються (постулюються) властивості для показникової функції:

1. $\exp_a(1) = a$.
2. $\exp_a(x) > 0$, для усіх $x \in R$.
3. Для усіх дійсних значень x та y :

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$$

4. При $a > 1$ функція $\exp_a$ зростає на всій числовій прямій, а при $0 < a < 1$ – спадає (рис. 1. 2).

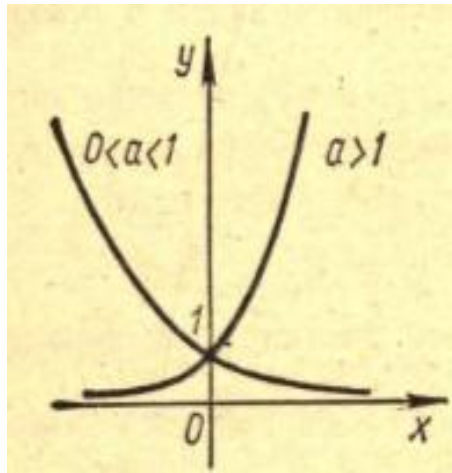


Рис. 1.2. Зміна функції $a^x = \exp_a(x)$

5. Показникова функція неперервна в кожній точці числової прямої.
6. Множиною значень показникової функції (для будь-якої додатної основи, відмінної від одиниці) є додатна напівпряма $R_+ =]0; \infty[$.
7. Функція $\exp_a$ має обернену функцію, областю визначення якої є додатна напівпряма R_+ , а множина значень – вся числова пряма R . Ця функція називається логарифмічною функцією з основою a , її позначають $\log_a$.

Із означення функції $\log_a$ слідує, що для додатних $a \neq 1, b \neq 1$

$$a = b^{\log_a b}$$

8. При $b > 0$ і будь-яких x і y

$$(b^x)^y = b^{xy}.$$

Далі йде розв'язування задач, вивчення похідної для цієї функції. Пояснень та доведень небагато, присутні 33 завдання на закріплення матеріалу.

Зазначений підхід, запроваджений у межах реформи 1970-х років, був спрямований на зближення шкільного курсу математики з університетською «вищою математикою» ($\exp_a$), однак виявився надмірно складним для умов масової школи, у зв'язку з чим у пізніших підручниках (зокрема, О. С. Шкіль, М. І. Бевза) було здійснено повернення до традиційного запису a^x .

Період незалежності (1991-2000 роки)

Реформування освіти: після здобуття незалежності в Україні почався процес реформування освіти, що включало оновлення навчальних програм і підручників, враховуючи національні особливості та сучасні вимоги.

Підручники та програми: введення нових підручників та навчальних програм з математики, які більше орієнтовані на розвиток критичного мислення і творчого підходу до розв'язування задач (Верховна Рада УРСР, 1991; КМУ, 1993; Шкіль та ін. 1999). З'явилися нові теми та розширені підходи до вивчення функцій.

Одним із найбільш популярних у цей період був підручник авторського колективу М. І. Шкіль, З. І. Слєпкань, О. С. Дубинчук «Алгебра і початки аналізу» для 10-11 класів (Шкіль та ін., 1998). У ньому функцій стосуються розділи: «Тригонометричні функції», «Тригонометричні рівняння», «Степенева функція», «Показникова функція», «Логарифмічна функція», «Границя і неперервність функції», «Похідна», «Застосування похідної», «Інтеграл та його застосування», «Похідна і первісна показникової, логарифмічної та степеневих функцій».

У першому параграфі підручника «Повторення і розширення відомостей про функції» дають означення функції: «Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y » (Шкіль та ін., 1998). Окремо означається числова функція

«числовою функцією з областю визначення X називають залежність, при якій кожному числовому значенню x з множини X ставиться у відповідність єдине деяке число y ». Подаються властивості функцій: область визначення, область значень, зростаюча, спадна, парна, непарна. А потім переходять до огляду властивостей основних видів функцій: $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = [x]$, $y = \{x\}$. Також окремо виділено побудову графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

Далі в підручнику вводять означення функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, вивчають їх властивості: область визначення, область значень, періодичність, нулі функції, проміжки зростання та спадання, проміжки знакосталості, найбільше та найменше значення функції, а також виконують побудову графіків цих функцій. Для всіх функцій здійснюється однакова схема вивчення: вводиться означення, будується графік, визначаються властивості. Складніші функції будують за допомогою геометричних перетворень.

Після вивчення всіх основних елементарних функцій та їх властивостей у 10 класі, у 11 класі вводиться поняття границі і неперервності функції в точці та на проміжку, поняття похідної, а також вивчаються властивості границь, таблиця похідних та правила їх знаходження. Окремо вивчається застосування похідної: геометричний зміст, дослідження функцій на монотонність та екстремуми. Закінчують цю тему вивчаючи загальну схему дослідження функції та побудову їх графіків (Шкіль та ін., 1998):

- 1) Знайти область визначення функції.
- 2) Знайти точки перетину графіка з координатними осями.
- 3) Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
- 4) Знайти значення функції на кінцях відрізків, де визначена функція.
- 5) Знайти інтервали монотонності функції.

- 6) Знайти екстремальні точки функції і побудувати їх на площині.
- 7) На основі дослідження побудувати графік функції.

Методично значущим є поданий у підручнику матеріал «використання показників функції під час вивчення явищ навколишнього середовища». Це задачі про радіоактивний розпад, про зміну атмосферного тиску, про розмноження бактерій, про вакуумування, про приріст деревини.

Сучасний етап (з 2000 року)

Починаючи з 2000 року, вивчення функцій у шкільному курсі математики можна охарактеризувати кількома ознаками:

1. **Методи інтерактивного навчання:** використання комп'ютерних технологій, мультимедійних презентацій і онлайн-ресурсів тощо. Це дозволяє робити процес навчання цікавішим та доступним для сучасних учнів.

2. **Індивідуальний підхід:** збільшення уваги до індивідуальних потреб учнів. Використання диференційованого підходу, який враховує різний рівень підготовки та зацікавленість учнів.

3. **Практичне застосування:** розширення спектра практичних задач, які демонструють застосування функцій у реальному житті. Це сприяє кращому розумінню учнями важливості математики та її зв'язку з іншими науками.

4. **Методичні матеріали:** розробка нових методичних матеріалів для вчителів, що включають сучасні підходи до викладання функцій. Це допомагає вчителям постійно оновлювати свої знання та методики роботи.

Згідно з навчальним посібником з методики навчання математики (Слепкань, 2006), у цей період вивчення функцій передбачається у 8 класі ($y = kx + b$, $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$), у 9 класі ($y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$), у 10 класі ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \log_a x$).

Основною метою вивчення функцій у 8-9 класах було формування уявлення про функції як математичної моделі залежності між величинами

та об'єктами будь-якої природи; введення поняття про основні способи задання функцій на прикладах прямої й оберненої пропорційності, розгляд функцій: $y = kx + b$, $y = kx$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ та їхніх графіків, табличних способів задання (Слепкань, 2006). Методична схема вивчення функцій була загальною для всіх функцій. Їх вивчення здійснювалось в декілька етапів:

1. Етап мотивації.
2. Формулювання означення функції, що впроваджується.
3. Побудова по точках за заздалегідь підготовленою таблицею графіка функції та «зчитування» за ним властивостей.
4. Застосування властивостей вивченої функції.

Окремо, у 9-10 класах під час систематизації знань про функції, та вивчення нових властивостей (зростання, спадання, парність, непарність, періодичність) вимагається довести ці властивості аналітично (Слепкань, 2006).

Еволюція вивчення функцій у старшій школі зазнавала змін разом із зміною програм та підручників, продовж десятиліть відбувалися зміни, які стали ключовими для вивчення функцій сьогодні. Проаналізувавши підручники за 2003 рік, 2010 та 2018 ми можемо ці зміни прослідкувати. У підручниках Шкіля М.І., Слепкань З.І., Дубинчук О.С. за 10 клас 2003 року зміст вивчення теми був таким: тригонометричні функції, тригонометричні рівняння, степенева функція, показникова функція, логарифмічна функція. У підручниках Шкіля М. І., Слепкань З. І., Дубинчук О. С. за 11 клас 2002 року зміст вивчення теми був таким: границя і неперервність функції, похідна, застосування похідної, інтеграл та його застосування. Суттєвих змін між підручниками 1998 року та 2002-2003 роками майже немає. Матеріал за 10 клас містить однакові теми, однак 11 клас зазнав змін. Розділ «Похідна і первісна показникової, логарифмічної та степеневої функцій» вилучили, натомість у новому підручнику це матеріал додали в нові розділи.

Структурно зміст та виклад матеріалу стали більш логічними та структурованими. Самі ж підручники набули дещо іншого вигляду, означення та формули почали виділяти, додали історичні довідки.

Через кілька років зміст підручників знову зазнав змін. Через зміну навчальної програми (МОН, 2004) новий авторський колектив А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір у своєму підручнику «Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)» (10 клас, 2010 року) помістили зовсім інший зміст: функції, многочлени, рівняння та нерівності; степенева функція; тригонометричні функції. У 2011 році ці самі автори випустили підручник «Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)» (11 клас): похідна та її застосування; показникова та логарифмічна функції.

Зміст підручників цих самих авторів зазнав зміни тільки в одному – вивчення похідної перенесли у 10 клас. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір у своєму підручнику для 10 класу «Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)» (2018 року): повторення та розширення відомостей про множини та функції; степенева функція; тригонометричні функції; тригонометричні рівняння та нерівності; похідна та її застосування. А уже у підручнику для 11 класу «Алгебра і початки аналізу (профільний рівень)» (2019 року): показникова і логарифмічна функції.

На підставі проведеного аналізу можемо зробити висновок, що в сучасних підручниках з математики вивчаються ті самі основні елементарні функції, що й раніше, але порядок вивчення цих функцій може відрізнятися. Відрізняються також і підходи до самого означення функції:

- «Залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y ». (Шкіль та ін., 1998)
- «залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y ». (Нелін, 2018)

- «Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D ставиться у відповідність єдине число y ». (Нелін, 2018)

- «Нехай X – множина значень незалежної змінної, Y – множина значень залежної змінної. Функція – це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y . Іншими словами: функція – це правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y » (Мерзляк та ін., 2018).

- «Указано правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної. Таке правило називають функцією, а відповідну залежність однієї змінної від другої – функціональною.» (Мерзляк & Якір, 2024)

- «якщо змінна y залежить від змінної x , причому кожному можливому значенню x відповідає лише одне значення y , то таку залежність називають функціональною залежністю або функцією» (Шкільний та ін., 2024)

Аналіз наведених означень свідчить про відсутність єдиного підходу до означення функції, що виражається у використанні авторами різних методичних концепцій відповідно до принципів концентричності та наступності. Зокрема, у працях М. Шкіля, О. Шкільного та в базових курсах Є. Неліна домінує *генетичний підхід*, де функція трактується як залежність, що є найбільш адаптованим для первинного сприйняття учнями 7-го класу. Водночас у підручниках А. Мерзляка та В. Якіра (2024) реалізовано *процедурний (алгоритмічний) аспект*, де функція постає як «правило», що акцентує увагу на самому процесі отримання результату, роблячи поняття операційним. Натомість у курсах профільного рівня (Нелін, 2018; Мерзляк, 2018) відбувається перехід до *структурного (теоретико-множинного) підходу*. Тут функція визначається через відповідність між елементами множин, що дозволяє розглядати її як цілісний математичний об'єкт. Така

трансформація від наочної залежності до суворой логічної категорії забезпечує термінологічну точність і наукову наступність між загальною середньою та вищою освітою, адаптуючи рівень абстракції до конкретних профілів навчання.

Наразі старша профільна школа передбачає вивчення математики за програмами трьох рівнів (КМУ, 2017): рівень стандарту, профільний рівень та поглиблений рівень. Для всіх трьох рівнів (стандарт, профіль, поглиблений) зберігається єдина лінія «функція → властивості → графік → застосування», яка формує в учнів цілісне розуміння змістової лінії «Функції». Спільними є:

- поняття числової функції, способи її задання, властивості та графіки;
- вивчення степеневий, тригонометричної, показникової та логарифмічної функцій;
- формування уявлень про похідну, її геометричний і фізичний зміст;
- застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків;
- розв'язування рівнянь і нерівностей, пов'язаних із відповідними класами функцій.

Не зважаючи на спільне змістове ядро, між вивченням функцій на різних рівнях існують певні відмінності. Справді, рівень стандарту орієнтований на формування базової математичної грамотності та практичне застосування знань; його метою є побудова цілісних уявлень про функції та опанування основних алгоритмів роботи з ними. Поглиблений рівень передбачає суттєве розширення теоретичного змісту курсу, розвиток аналітичного мислення та комплексну підготовку учнів до вивчення вищої математики у ЗВО. Профільний рівень має системний, професійно орієнтований характер і передбачає найбільший обсяг навчального часу для ґрунтовного опанування предмета. Він спрямований на підготовку учнів до майбутньої діяльності у галузях інженерії, ІТ та природничих наук.

Тому, при вивченні функцій спільними для профільного рівня та рівня стандарту є: означення функції (функція трактується як правило, за допомогою якого для кожного значення незалежної змінної (аргументу) з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y); основні властивості функцій (область визначення ($D(f)$), область значень ($E(f)$), нулі функції, проміжки знакосталості, а також проміжки зростання та спадання, парність та непарність); класи основних функцій (у 10 класі вивчаються степеневі та тригонометричні функції, а в 11 класі – показникові та логарифмічні.).

Розглянемо відмінності між профільним рівнем та рівнем стандарту стосовно вивчення функцій.

1. Теоретична глибина та формалізація.

- Множини: на профільному рівні 10 класу вивчення функцій починається з розлогого вивчення теорії множин та операцій над ними (перетин, об'єднання, різниця), що слугує основою для означення функції. На рівні стандарту ці відомості подаються стисліше або як повторення.

- Оборотноість функцій: на профільному рівні детально розглядаються поняття оборотної функції (вивчається окремо), умови оборотної (зростання/спадання) та алгоритм знаходження оберненої функції. На рівні стандарту 10 класу цей аспект згадується менш формалізовано (поняття згадується лише контекстуально, наприклад, при вивченні коренів n -го степеня або тригонометричних функцій).

- Границя та неперервність: на профільному рівні у 10 класі вводиться строге означення границі функції в точці та неперервності. На рівні стандарту поняття неперервності часто пояснюється інтуїтивно (графік неперервної функції як лінія, яку можна зобразити, не відриваючи руки від паперу).

2. Особливості викладу теоретичного матеріалу у 10 та 11 класах.

- У 10 класі на профільному рівні більше уваги приділяється

геометричним перетворенням графіків функцій (паралельне перенесення, стиск, розтяг, симетрії відносно осей); вивчається ділення многочленів куточком, теорема Безу та схема Горнера для подальшого вивчення властивостей раціональних функцій. Степенева функція $y = x^{\alpha}$ розглядається залежно від того яким є показник α (натуральний, цілий від'ємний, раціональний). Означення похідної на рівні стандарту та профільному рівні подано через границю відношення приросту функції до приросту аргументу. Вивчаються основні правила диференціювання суми, добутку та частки. Але на профільному рівні розглядаються складніші випадки диференціювання функцій, означення та методи знаходження вертикальних, горизонтальних та похилих асимптот, окремо вивчається тема «Друга похідна. Поняття опуклості функції». Вводяться означення опуклості вгору та вниз, поняття точки перегину та строгі ознаки опуклості на основі знаку другої похідної. Знаходження інтервалів опуклості та точок перегину є обов'язковим елементом плану дослідження функції. На рівні стандарту асимптоти, опуклість та друга похідна відсутні у змісті та в загальному плані дослідження функцій. План дослідження закінчується точками екстремуму та значеннями функції в них.

- У 11 класі: на профільному рівні та рівні стандарту вивчають показникові та логарифмічні функції, їхні властивості (вид монотонності залежно від основи a) та графіки цих функцій; на профільному рівні додатково досліджуються для показникових та логарифмічних функцій асимптоти, опуклість та точки перегину. На рівні стандарту вивчають поняття первісної та невизначеного інтегралу, поняття визначеного інтегралу як числа, що обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца, а також їх найпростіші застосування. На профільному рівні вивчають той самий матеріал, але більше властивостей первісної, визначеного інтеграла та більше їх застосувань. Зокрема, обчислюються об'єми тіл обертання та приділяється більше уваги правилам інтегрування складених функцій з

лінійним аргументом.

Таким чином, програми з математики рівня стандарту та профільного рівня мають спільний понятійний апарат (означення функції, її властивостей та основних класів), але профільний рівень вирізняється ширшим використанням теорії множин, вивченням складніших перетворень графіків функції, глибшим аналізом властивостей функцій (інтервали опуклості, точки перегину, асимптоти функції) та ширшим колом прикладних задач.

Підсумовуючи вище сказане приходимо до наступних висновків:

1. Методика вивчення змістової лінії «Функції» в українській школі за останні 100 років зазнала значних змін, переходячи від знаннево-центричної парадигми до компетентнісної парадигми. Це дозволяє забезпечити більш ефективне та підвищення пізнавальної мотивації учнів через контекстність завдань, готуючи їх до викликів цифрового суспільства та потреб ринку праці.

2. Еволюція методики вивчення функцій в українській школі відображає трансформацію педагогічних підходів від формально-теоретичного засвоєння до діяльнісного, компетентнісно орієнтованого навчання. У радянський період методика спиралася на уніфіковані підручники та репродуктивні способи навчання з акцентом на алгоритмічність, побудову графіків за таблицями значень і «зчитування» властивостей. У наступному періоді відбувається переосмислення змісту та структури функціональної лінії: вводиться поетапна пропедевтика, удосконалюється послідовність і логіка формування понять, з'являються варіативні програми та можливості диференціації навчання.

3. У 2000-х роках суттєво розширюється методичний інструментарій: використання геометричних перетворень для побудови графіків (перехід від ручної побудови графіків до динамічної візуалізації за допомогою програмного забезпечення (GRAN 2D, GeoGebra, Desmos тощо)), аналітичного доведення властивостей, технологій математичного аналізу, а

також інформаційно-комунікаційних засобів і математичного моделювання. Сучасний етап вивчення змістової лінії «Функції» характеризується інтеграцією функцій у вирішення реальних проблем, підсиленням практичної спрямованості навчання, формуванням критичного й алгоритмічного мислення, забезпеченням індивідуальної освітньої траєкторії учня.

Таким чином, методика навчання функцій еволюціонувала від однотипних репродуктивних підходів до багатокомпонентної системи, що враховує вікові особливості, ціннісні орієнтири освіти, потреби суспільства та вимоги сучасної математичної компетентності.

1.2. Теоретичні основи і можливості використання сучасних засобів навчання при вивченні функцій учнями ліцею.

1.2.1. Теоретичні основи використання сучасних засобів навчання в навчанні математики

Процес навчання у сучасній педагогіці розглядається як цілісна структура, де кожен елемент взаємопов'язаний з іншими. Засоби не існують ізольовано, вони є невід'ємною частиною *методичної системи навчання*. У сучасній методичній науці (Слепкань, 2006; Швець, 2024) виділено такі компоненти цієї системи: цілі, зміст, методи, організаційні форми і засоби навчання. Усі зазначені компоненти методичної системи навчання перебувають у стані тісної залежності: зміна одного елемента неминуче спричиняє трансформацію інших. Наприклад, оновлення цілей освіти (орієнтованість на компетентнісний підхід) вимагає перегляду змісту та підбору відповідних методів навчання (Благодир, 2018).

Цілі та зміст навчання визначаються насамперед державними нормативними документами у сфері освіти (Концепція «Нова українська школа», 2016, Державний стандарт базової середньої освіти, 2020,

Державний стандарт профільної середньої освіти, 2024 та інші). Методи навчання та організаційні форми зазнають змін, але ці зміни не є настільки стрімкими, як зміни, що стосуються засобів навчання. Зміна засобів навчання, образно висловлюючись, створює новий освітній простір, який потребує відповідних організаційних форм навчання та сприяє модернізації наявних методів навчання. Слід зазначити, що засоби навчання наразі перебувають в епіцентрі найбільших змін, що диктуються стрімким технологічним прогресом. Якщо традиційно цей компонент методичної системи асоціювався переважно з підручниками та наочним приладдям, то на сьогодні, завдяки цифровізації освіти, він перетворюється на систему інтерактивних інструментів, які дозволяють вчителю відповідати потребам і запитам сучасного учня (Шищенко, 2022). Сучасні засоби навчання не просто доповнюють навчальний процес, а стають основою для реалізації інноваційних форм і методів навчання, що дозволяє візуалізувати абстрактні математичні поняття та забезпечити зв'язок між теорією та практикою.

Трансформація освітнього простору зумовлює вихід за межі традиційного інструментарію (підручник, дошка). Зараз у вільному доступі є багато інших ресурсів для проведення цікавих уроків, існує можливість підібрати різноманітні навчальні матеріали та засоби. Сучасні уроки можуть потребувати сучасних засобів навчання. Використання наочності ускладнюється під час розв'язування задач із застарілим змістом, які демонструють лише пряме застосування математичних засобів. Тобто, якщо для навчання використовувати задачі зі застарілими або відірваними від сучасного життя сюжетами, то такі задачі не дають можливості ефективно застосувати наочність і продемонструвати реальну цінність математичних знань. Учні тоді бачать лише формальне «підставляння у формули» та пряме обчислення, а не розуміють, як математика працює у сучасних ситуаціях і реальних проблемах (Wisenöcker et al., 2023).

Важливо добирати актуальні матеріали та використовувати сучасні засоби навчання. Але що можна вважати сучасним засобом навчання? Чи буде підручник сучасним засобом навчання? Чи лише комп'ютерні засоби навчання можна вважати сучасними?

Почнемо з того, що саме визначення «засоби навчання» має декілька трактувань. Наприклад, Лебедик Л. В., Стрельников В. Ю., Стрельников М. В. розглядають засоби навчання як об'єкти, що є джерелом навчальної інформації й інструментами для засвоєння змісту навчального матеріалу і вирішення виховних завдань (Лебедик та ін., 2020). До засобів навчання математики З. І. Слєпкань відносить: підручник з математики, дидактичні матеріали та довідкова математична література, навчальне обладнання, зокрема наочні посібники, моделі, рисунки, схеми, таблиці, предмети оточення, інструменти, прилади, екранні засоби навчання, калькулятори, персональні комп'ютери, відповідні педагогічні програмні засоби – вони мають утворювати єдиний комплекс, основою якого є підручник математики (Слєпкань, 2006). Ми використовували в дослідженні означення Ю. Жука «Засоби навчання (англ. educational media, media of education) – будь-які засоби, прилади, обладнання та устаткування, що використовуються для передачі інформації в процесі навчання.» (Жук, 2021). Аналіз наведених визначень дає підстави стверджувати, що в сучасній українській школі поняття «засоби навчання» еволюціонує від суто матеріальних об'єктів до складних інформаційно-когнітивних комплексів.

Засоби навчання сприяють формуванню матеріальну та інформаційну компоненти навчального середовища, впливають на діяльність суб'єктів навчання та організацію дидактичного процесу, створюють умови для забезпечення можливості досягнення конкретних, заздалегідь сформульованих, цілей навчання, які можуть охарактеризувати якість дидактичного процесу (Жук, 2021). У контексті вивчення змістової лінії «Функції» засоби навчання мають забезпечувати зв'язок між різними

формами репрезентації функції: аналітичною (формула), табличною (таблиця значень) та геометричною (графік). Сучасні засоби навчання роблять ці зв'язки «живими»: зміна значення в таблиці миттєво відображається на графіку, що сприяє глибокому розумінню функціональної залежності. Технічний прогрес та поява штучного інтелекту (далі – ШІ) зумовлюють появу принципово нових засобів навчання, які здатні формувати навчальне середовище на основі інформаційних технологій. Що створює можливість навчатися як в школі, так і поза її межами.

В останні роки все більше вчителів використовують сучасні засоби навчання. Академік М. І. Жалдак зазначає: «Впровадження в навчальний процес сучасних засобів пошуку, збирання, зберігання, опрацювання, подання, передавання різноманітних відомостей відкриває широкі перспективи гуманітаризації освіти і гуманізації навчального процесу, поглиблення і розширення теоретичної бази знань і надання результатам навчання практичної значущості, активізації пізнавальної діяльності, створення умов для повного розкриття творчого потенціалу дітей з урахуванням їхніх вікових особливостей і життєвого досвіду, індивідуальних нахилів, запитів і здібностей» (Жалдак, 2009).

Нові засоби навчання можна назвати словом «сучасні». Оскільки це сукупність технологій та ресурсів, які використовуються для підвищення ефективності та якості освітнього процесу та дозволяють створювати інтерактивні, персоналізовані та гнучкі умови для навчання. У реаліях пандемії, а потім і воєнного стану в Україні все більше учнів потребує індивідуалізації освітнього процесу через відключення світла, відсутність зв'язку та змоги навчатися очно. Все більше шкіл переходять на змішане навчання, з'являються дистанційні школи. Частина вчителів проводять паралельно онлайн та офлайн уроки. Це вимагає значної підготовки і в цих умовах традиційні засоби навчання можуть бути менш ефективними.

Відсутність в учнів підручника чи зошита створює виклик для вчителя, адже у нього на меті надати якісну освіту. Для цього у вільному доступі є значна частина сучасних засобів навчання (додаток И).

Варто розрізняти поняття «сучасні засоби навчання» та «цифрові засоби навчання». Якщо другі визначаються технологічною формою (наявністю програмного коду чи електронної бази), то перші – дидактичною актуальністю. Наприклад, традиційний паперовий підручник, що містить QR-коди з посиланнями на динамічні моделі або кейсові завдання, є сучасним засобом навчання, тоді як комп'ютерна програма 2000-х років, попри свою цифрову природу, таким статусом уже не володіє. Отже, на основі аналізу згаданих вище робіт Ю. Жука (Жук, 2021), М. Жалдака (Жалдак, 2009) та інших дослідників можна сформулювати наступне означення: *«Сучасні засоби навчання – це комплекс об'єктів, які використовуються для організації ефективного навчального процесу в сучасних умовах цифровізації освіти»*.

Характерними ознаками для сучасних засобів навчання є: інтерактивність, гнучкість, мультимедійність, доступність (додаток К). Оскільки в сукупності всі ці засоби мають адаптувати навчальний процес до індивідуальних потреб, рівня знань та стилю навчання кожного учня; забезпечити активну взаємодію учня з навчальним матеріалом та іншими учасниками освітнього процесу; бути у вільному доступі та використовувати різноманітні формати подання інформації (текст, аудіо, відео, графіка), що сприяє кращому засвоєнню матеріалу. Сучасні засоби навчання базуються на кількох ключових теоретичних підходах:

1. Конструктивізм: основою конструктивістського підходу є ідея, що учні активно будують свої знання на основі власного досвіду та взаємодії з навколишнім світом. Сучасні технології, такі як симуляції та динамічні програми, сприяють створенню середовища, в якому учні можуть експериментувати та досліджувати функції (Ямшинська, Невкіпілова,

2019). Наприклад, використання датчиків (CBR) або програм для аналізу відео дозволяє учням побудувати функцію реального руху (кидок м'яча), де абстрактна квадратична функція стає описом траєкторії конкретного об'єкта, тобто відбувається перехід від пасивного навчання до навчання через дослідження.

2. Теорія когнітивного навчання: ця теорія підкреслює важливість розуміння процесів обробки інформації в головному мозку. Використання мультимедійних презентацій, відео уроків та анімацій допомагає учням краще зрозуміти абстрактні поняття, такі як функції, через візуалізацію та інтерактивні елементи (Гиря, 2019). Наприклад, анімація, що демонструє граничний перехід січної у дотичну, дозволяє «побачити» процес виникнення похідної. Це замінює статичне пояснення динамічним образом, що відповідає механізмам когнітивної обробки інформації, спрямованим на розпізнавання патернів руху.

3. Зональна теорія розвитку Виготського: згідно з цією теорією, навчання є найефективнішим, коли воно відбувається в «зоні найближчого розвитку» учня, де він може виконувати завдання з невеликою допомогою. Використання засобів навчання, таких як адаптивні навчальні платформи, допомагає персоналізувати навчання та підтримувати учнів у їхньому індивідуальному темпі (Наконечна, 2018). Наприклад, у додатку Desmos (Activity Builder + Computation Layer) можна створити завдання на встановлення відповідності, платформа пропонуватиме учню поєднати графік із його аналітичним записом. У разі помилки, замість оцінки, система підсвічує ключову точку (наприклад, перетин з віссю OY), яка не збігається з обраною формулою. Така мінімальна підказка не дає готового розв'язку, але надає інструмент для його самостійного знаходження, що є ключовим для теорії Виготського.

Аналізуючи роботи Ю. Жука (Жук, 2021), Ю. Лободи (Лобода, 2012) можемо виокремити наступні класифікації засобів навчання:

- За характером впливу на учня: візуальні (слайди, карти, макети, наочні посібники, діафільми, інфографіки), аудіальні (аудіозаписи, подкасти), аудіовізуальні (відеозаписи, ІКТ – презентації, мультимедійні дошки).
- За ступенем складності: середній рівень (підручники, друковані навчальні посібники, об'ємні моделі, зображення), високий рівень (комп'ютери, лінгафонні кабінети, механічні візуальні засоби).
- За природою об'єктів: природні (природні об'єкти або їх зображення), штучні (моделі, макети, симулятори).
- За функціональним призначенням: інформаційні (підручники, енциклопедії, довідники), контролюючі (тести, контрольні роботи, програмовані навчальні засоби), навчальні (тренажери, симулятори, навчальні програми).
- За технологічними характеристиками: традиційні (друковані матеріали, дошки, крейда), сучасні (комп'ютери, планшети, мультимедійні дошки, освітні платформи).

Кожен засіб навчання може відповідати різній класифікації. У пункті 1.2.2. ми розглянемо детальніше технічні можливості, сфери та способи застосування різних навчальних засобів.

Сучасна українська освіта націлена на особистісно-орієнтоване навчання, що нормативно закріплено в Концепції Нової української школи (2016) та Державному стандарті повної загальної середньої освіти (2020). Тому перед учителем постає завдання розкрити, зберегти й розвинути індивідуальність кожного учня, виявити та врахувати його потенційні можливості, потреби, бажання та згідно з ними забезпечити диференційований підхід під час навчання.

Такий підхід потребує створення в процесі навчання сучасного освітнього середовища, яке буде розвивати в учнів необхідні навички й компетентності (уміння вчитися, креативність, критичне мислення,

спілкування, робота в команді тощо), формувати його як особистість. Для цього вчитель має враховувати у своїй роботі сучасні освітні тренди: компетентнісний підхід у навчанні, STEM освіту, педагогіку партнерства, персоналізацію навчання, інклюзивне навчання, практико-орієнтоване навчання, дослідницьке навчання, гейміфікацію, онлайн курси, зміна ролі вчителя від наставника й керівника до модератора й фасилітатора тощо.

У сучасних умовах стрімкого розвитку технологій та інформаційного суспільства освіта стоїть перед новими викликами та потребами (Яшанов & Назаренко, 2025). Педагоги та дослідники Matos, J., Gomes, R., Rios, G. (Matos et al., 2023), Balakrishnan, R., Dhevi, R. M. (Balakrishnan & Dhevi, 2024), Almeida, L., Santos, C. (Almeida & Santos, 2024) пропонують відійти від традиційного сценарію навчання, надаючи своїм учням більше можливостей для активної участі в процесі навчання через застосування різноманітних методик. У світі відбувся перехід від звичайних класів до онлайн-класів і змішаного навчання. Однак, дивлячись на екрани ноутбуків, учням легше відволіктись й зайнятися чимось іншим. Ми не можемо звинувачувати учнів у тому, що вони погано навчаються; вчитель також зобов'язаний не давати нудних і сухих уроків, від яких учні втомлюються.

Теоретичний аналіз сучасних засобів навчання демонструє суттєве розширення їхнього змісту та функцій у математичній освіті. У контексті вивчення змістової лінії «Функції», зокрема в старшій профільній школі, сучасні засоби навчання створюють умови для глибшого розуміння абстрактних понять, активізації пізнавальної діяльності, розвитку математичного мислення та забезпечення індивідуальної освітньої траєкторії. Водночас ефективність цих засобів визначається не їх технологічністю, а методичним обґрунтуванням використання. Аналіз наукових джерел зазначених в цьому пункті засвідчує брак чітких рекомендацій щодо інтеграції сучасних засобів у процес навчання математики, що ускладнює їх системне застосування вчителями. Щоб

забезпечити якісне опанування змістової лінії «Функції», необхідною є розробка методичних підходів до використання цифрових та мультимедійних засобів, спрямованих на формування ключових математичних компетентностей.

Отже, сучасні засоби навчання розглядаються нами як педагогічний інструментарій, що, за умови науково обґрунтованої методики, здатний підвищувати результативність навчання математики та вивченню змістової лінії «Функції» у старшій школі, сприяти індивідуалізації освітнього процесу та забезпечувати відповідність математичної освіти викликам технологічно орієнтованого суспільства.

1.2.2. Можливості використання сучасних засобів навчання математики

Сучасний освітній процес зазнає значних трансформацій, зумовлених розвитком ІКТ. Засоби навчання набувають нових форм, які сприяють підвищенню ефективності засвоєння знань, розвитку когнітивних здібностей та формуванню компетентностей учнів. Використання мультимедійних та цифрових технологій дозволяє персоналізувати навчальний процес, забезпечити адаптивність навчальних матеріалів і розширити можливості дистанційної освіти (Каніщев та ін., 2025).

Цей підпункт присвячено опису сучасних засобів навчання, їх функціональних можливостей, переваг та недоліків. Особлива увага приділяється підручникам, ІІІ, онлайн-дошкам, онлайн – сервісам , які сприяють удосконаленню педагогічної діяльності та підвищенню рівня залученості здобувачів освіти.

Підручники

Найбільш традиційним засобом навчання є *підручник*. Сучасні підручники переважно мультимедійні, містять QR-коди, забезпечують розвиток компетентностей, є доступними.

Сучасні підручники представлені у двох формах: паперові та електронні. Кожна з цих форм має свої переваги та недоліки. Дослідження Alfiras, M., Wojiah, J. (Alfiras & Wojiah, 2020) показує, що багато учнів віддають перевагу електронним підручникам через їх зручність, але вибір залежить від навчальної дисципліни. Відмінності між двома форматами підручників розглянуто в додатку Л.

Спираючись на дослідження Tanner M. (Tanner, 2014) та Dharmarajlu S. (Dharmarajlu, 2025), ми в своїй роботі реалізували комбінований підхід до використання паперових та електронних підручників: електронні підручники чи цифрові матеріали для ілюстрацій, динамічних вправ, моделювань, а паперовий – для теоретичного опрацювання, конспектування, систематичної роботи.

Сучасні підручники містять задачі які спрямовані на пряме застосування математики в реальному житті. Окремі задачі, що запропоновано у підручнику, це задачі з реальними даними, які стосуються використання, збереження та примноження природних ресурсів, безпеки й охорони здоров'я громадян, кількісних показників розвитку суспільства і планування господарської діяльності, складання сімейного бюджету та реальної оцінки власних можливостей тощо (Бевз & Бевз, 2018).

Наприклад, задача «Ательє виготовляє та продає вишиванки, вартість кожної з яких 750 грн. Щоб пошити одну таку сорочку, потрібно 2,4 м тканини. Запишіть формулу для обчислення залишку тканини після пошиття x сорочок, якщо в сувої 50 м тканини. Яких значень може набувати x ? Скільки тканини залишиться в сувої, якщо пошиють 15 сорочок? Який дохід матиме ательє від продажу цих 15 сорочок? Який дохід матиме ательє, якщо продасть усі сорочки, виготовлені з одного сувою?» (Бевз & Бевз, 2018) розвиває підприємливість та фінансову грамотність.

Електронні підручники зараз є мультимедійні (рис. 1. 3). Наведемо їх характеристики.

1. Мультимедійна насиченість: інтеграція динамічних моделей та аудіовізуальних об'єктів, що забезпечує полісенсорне сприйняття матеріалу.

2. Аудіо та відео контент.

3. Доступна функція точного пошуку.

4. Інтерактивний зміст: пов'язаний зміст і активні посилання в розділах.

5. Примітки: можна додавати нотатки, коментарі, закладки.

6. Доступ до хмарного середовища із додатковою інформацією.

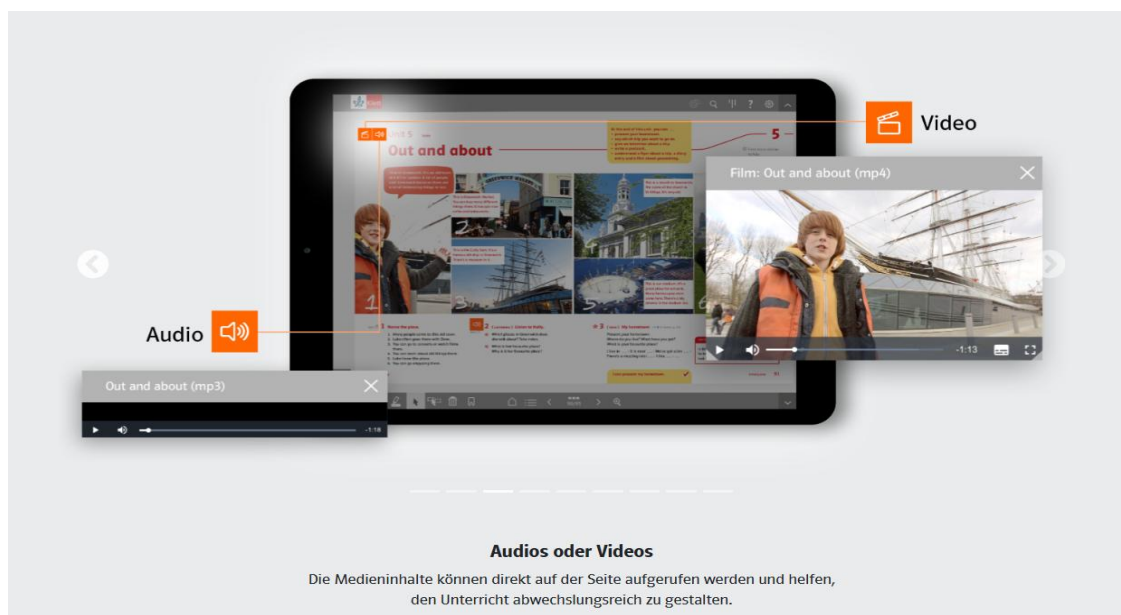


Рисунок 1. 3. Електронний підручник

Перевагами сучасних підручників, на нашу думку, є:

- Мультимедійність – вбудовані медіа, цифрові завдання та тести, гейміфікація.
- Персоналізація навчання – адаптивні навчальні платформи, зворотний зв'язок у режимі реального часу.
- Доступність – мобільні додатки та онлайн-платформи, доступ до матеріалів 24/7, можливість використовувати підручники на різних пристроях.
- Інтеграція з іншими ресурсами: посилання на зовнішні джерела, віртуальні лабораторії.

- Збереження та оновлення контенту: хмарне зберігання даних, автоматичне оновлення і доповнення контенту.

Сучасні підручники, це вже не просто пояснення та вправи, а повноцінний інструмент для навчання, який містить багато корисної інформації, зі швидким доступом до навчання, значно розширюють можливості навчання, роблячи його більш індивідуальним, мультимедійними та ефективним. Вони адаптуються до потреб сучасних учнів, забезпечуючи доступ до якісних освітніх ресурсів будь-де і будь-коли.

Штучний інтелект (ШІ)

У 2023 році в Україні став доступний ШІ ChatGPT, через його доступність та зрозумілість його почали багато використовувати. Це створило проблему для багатьох людей, зокрема вчителів, оскільки учні використовують його для виконання завдань різного типу.

Використання ШІ в освіті наразі викликає чимало дискусій та підштовхує до проведення наукових досліджень. Наприклад, Мала академія наук України спільно з Projector Creative & Tech Institute за підтримки Factum Group Ukraine та Міністерства освіти і науки України провели дослідження перспектив використання ШІ у шкільній освіті. У вересні та жовтні 2023 року це опитування пройшли 1 747 учителів і 1 443 учні 8–11 класів (Мала академія наук України, б. д.). Досвід використання ШІ у вчителів та учнів уже є:

- Більшість вчителів та учнів зазначили, що мають досвід користування сервісами ШІ. У більшості випадків аудиторія задоволена отриманим досвідом.

- Вчителі зазначають, що використовували сервіси ШІ у своїй діяльності з метою підготовки до занять, створення тестів для домашнього завдання, при проведенні занять, а також для перевірки знань учнів і, навіть, в позакласній роботі. Частина вчителів залучає учнів до використання ШІ.

- Учні, говорячи про досвід користування ІІІ, найчастіше зазначають його допомогу при підготовці домашнього завдання.

Переваг та недоліків використання ІІІ є досить багато. ІІІ зрозумілий та доступний, може значно спростити підготовку до уроків, творити тести, підготувати матеріал для самостійної роботи учнів, створити презентацію на задану тему. До недоліків ІІІ є те, що учні використовують його не тільки для навчання, а й розв'язання задач (Друшляк & Лукашова, 2023). Наразі ІІІ не завжди правильно розв'язує задачі з математики, але в будь-якому випадку він дає учням розв'язок (іноді не правильний), а учні цим розв'язком користуються. Це впливає на якість засвоєння навчального матеріалу.

У роботі D. Panqueban та J. Huincahue (2024) показано, що більшість емпіричних досліджень щодо застосування ІІІ в математичній освіті стосується інтелектуальних навчальних середовищ, спрямованих на підтримку розв'язування задач, формування навичок і організацію онлайн-оцінювання. Це особливо актуально для теми «Функції», де поєднуються високий рівень абстракції, потреба в різних способах задання функції (аналітичному, графічному, табличному тощо) та необхідність інтерпретації реальних залежностей.

Перелічимо можливості використання ІІІ при вивченні змістової лінії «Функції» в старшій школі.

1. Індивідуальні пояснення та побудова графіків функцій. Перевага в тому, що можна задати рівень знань для якого потрібне пояснення і ІІІ це врахує (рис. 1. 4).

2. Генерації графіків та динамічних візуалізацій. В багатьох смартфонах уже вбудовані інструменти ІІІ. Це дозволяє побудувати графік функції навіть в нотатках (рис. 1. 5).

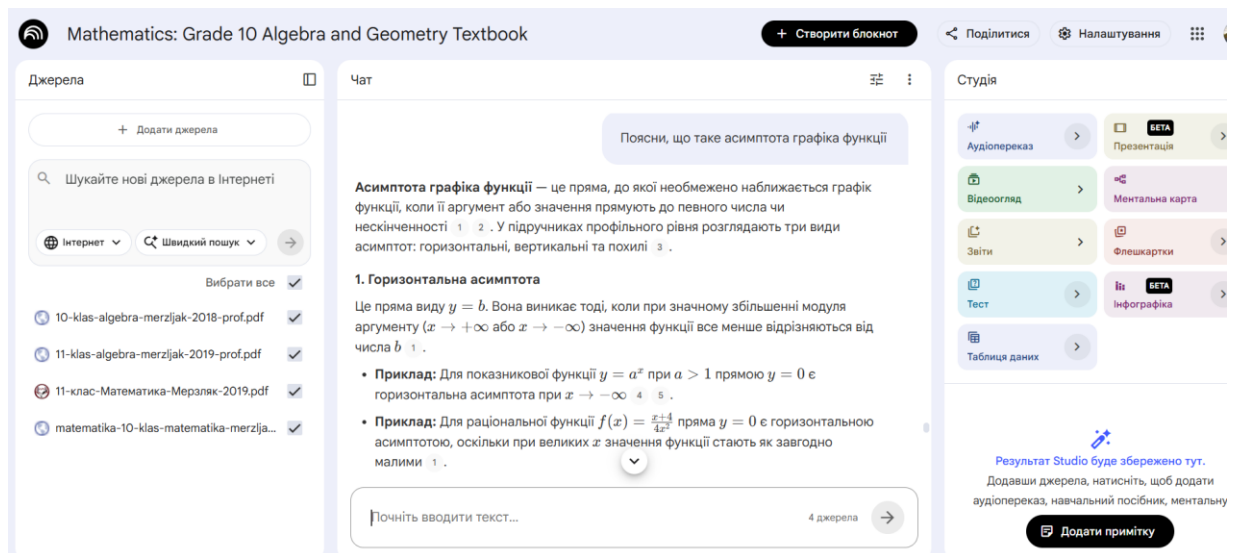


Рисунок 1. 4. NotebookLM. Означення асимптоти

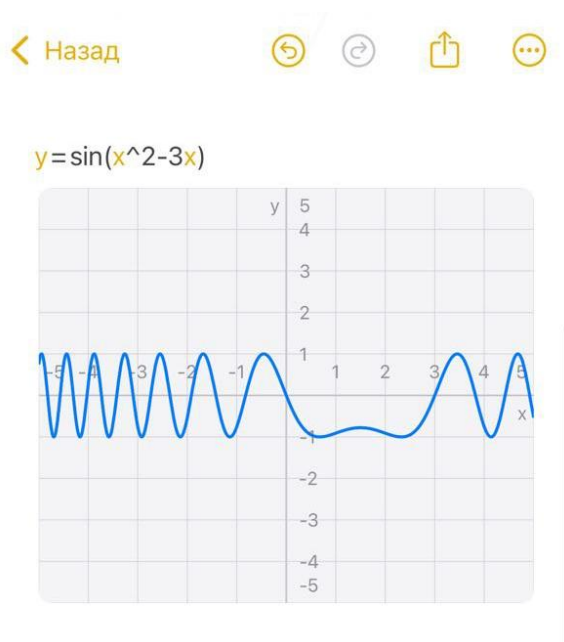


Рисунок 1. 5. Побудова графіка функції $y = \sin(x^2 - 3x)$ в додатку «Нотатки»

3. Автоматична генерація задач різного рівня складності. Можна згенерувати безліч варіантів різних завдань (знайти область визначення, побудувати графік, знайти нулі функції, встановити монотонність, знайти проміжки знакосталості, виконати перетворення. аналітичне дослідження функції, застосування похідної, побудова графіка за алгоритмом, задачі з параметрами, моделювання реальних процесів). Генерація таких завдань є необмеженою, що допомагає збільшити варіативність завдань.

4. Створення реальних математичних моделей. За допомогою правильно заданого промту (запиту) для ШІ, можна згенерувати завдання на експоненціальне зростання населення; радіоактивний розпад; зміну температури; економічну модель прибутку/збитку; залежність курсу валют; логістичне зростання (біологія/економіка); демографічні прогнози; рекомендаційні системи (як працюють алгоритми YouTube, TikTok). Єдиним недоліком є коректність розв'язків, варто перевіряти самостійно перед тим, як пропонувати такі завдання учням.

5. Створення цифрових міні-курсів і навчальних сценаріїв. Учитель може використовувати ШІ для створення презентацій; конструювання пояснювальних відео; формування «покрокових гід-уроків» для кожного різновиду функцій; адаптації матеріалу до НУШ / профільного стандарту; розробки змішаного навчання (blended learning).

Онлайн дошки

У зв'язку із початком дистанційного навчання вчителі почали шукати змогу проводити якісні онлайн-уроки. Починалось все із чатів у месенджерах, пояснення на «листочку», а згодом онлайн заняття через ZOOM чи Google Meet. Для таких онлайн занять необхідно засіб для запису інформації. В цьому випадку дуже зручним інструментом є онлайн – дошки для дистанційного навчання та спільної роботи. Їх вибір різноманітний: MIRO, AWWApp, IDroo, Classroomscreen, Microsoft Whiteboard та інші.

Виділимо переваги таких дошок: доступність (безбар'єрність, універсальність, організаційна/фінансова доступність); можливість писати та друкувати; можливість додавати зображення; можливість вставляти PDF файли; поєднувати в собі різні інструменти; всі необхідні засоби для навчання знаходяться в одному місці; необмежена площа використання; видно всі дії користувачів. Недоліки також присутні: частково платні засоби; обмеженість в кількості створення дошок; необхідний доступ до інтернету; частина програм лише англійською мовою. «Розберемо, які

можливості мають такі дошки на прикладі дошки MIRO. При створенні дошки сервіс одразу пропонує певні шаблони (для таблиць, мозкового штурму та інші) та панель інструментів (рис. 1. 6).

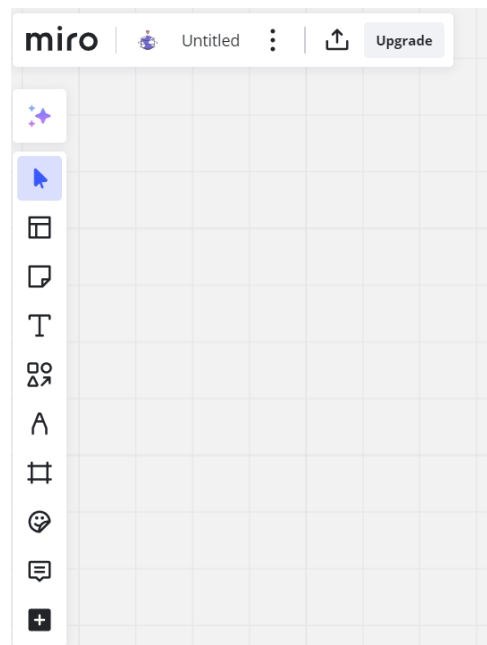


Рисунок 1. 6. Панель інструментів MIRO

Набір інструментів для роботи досить широкий: шаблони, наліпки, текст, фігури та лінії, створення малюнків від руки, наклейки, емої та gifs, коментар, діаграми, створення DOC документа, інтелект – картки, примітки, таблиці, планувальник, оцінки, чат, голосування, опитування, зображення, завантаження файлів, перевірка орфографії, вставлення мультимедійного вмісту та інші. Така дошка буде корисна для вчителя, адже туди можна завантажити усю необхідну для навчання інформацію. Можна завантажити підручник, створити робочі області для учнів, створювати хмари слів, записувати завдання, робити побудови фігур, створювати вправи, викладати домашні завдання та багато іншого.

Для вивчення теми «Функції» таку дошку ми рекомендуємо використовувати як єдине освітнє середовище, куди можна завантажити всі необхідні навчальні матеріали, інтегрувати графіки із GeoGebra, розмістити завдання для учнів. Така дошка, буде корисна для змішаного навчання, адже є постійний доступ до навчальних матеріалів. Особливо корисною така

дошка буде під час вивчення властивостей графіків функцій, адже на ній можна писати, виділяти основне маркерами, додавати коментарі.

Онлайн – сервіси

Урізноманітнення навчального процесу потребує використання цифрових вправ, адже це зміна виду діяльності, зацікавленість учнів у навчанні. Такі цифрові вправи можна створювати у LearningApps, Wizer, H5P, Kahoot, Canva, Classtime, Ahaslides та інших онлайн – сервісах. Розглянемо ці сервіси детальніше, оскільки вони використовуються в нашому дослідженні.

1. **LearningApps** є сервісом для підтримки процесів навчання та викладання за допомогою невеликих інтерактивних модулів. Ці модулі можуть використовуватись безпосередньо як навчальні ресурси або для самостійної роботи (LearningApps.org - interaktive und multimediale Lernbausteine, б. д.). Сервіс допомагає створювати вправи для усіх предметів. Ним можна створити такі завдання: знайти пару, класифікація, числова пряма, просте впорядкування, вільна текстова відповідь, фрагменти зображень, вікторина, заповнити пропуски, пазл, кросворд, знайти слова, таблиця відповідностей та інші. Для кожного класу можна створювати вправи на засвоєння нових знань з теми, перевіряти отримані знання. Наприклад, для теми «Функції» можна створити вправи на встановлення відповідності (рис. 1. 7) між аналітичним записом функції та її графічним представленням.

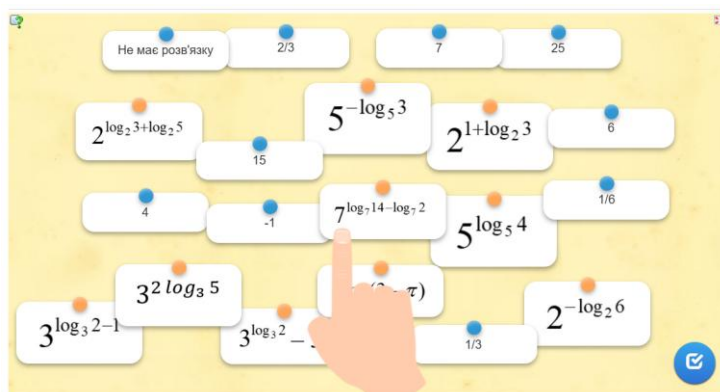


Рисунок 1. 7. Основна логарифмічна тотожність. 11 клас

2. **Wizer.me** це сервіс, що дозволяє створювати робочі аркуші, які можна використовувати при дистанційному навчанні, для домашніх робіт, для роботи в класі на мультимедійній дошці. Зручний тим, що вчитель створює робочі аркуші та запрошує учнів виконати завдання, а потім результати їх роботи можна переглянути в особистому кабінеті (Wizer.me, б. д.).

3. **H5P** – це плагін для існуючих систем публікації, який дозволяє системі створювати інтерактивний вміст, як-от інтерактивне відео, презентації, ігри, вікторини тощо (H5P, б. д.). Перевагою є те, що можна створити інтерактивну книгу, яку учні можуть використовувати як для навчання в класі, так і для самонавчання.

4. **Kahoot!** – онлайн сервіс для створення інтерактивних завдань. Дозволяє створювати тести, опитування, вікторини (Kahoot! AS, 2012). Зручний сервіс для проведення фронтальних опитувань, рефлексії, закріплення знань. З цим сервісом можна працювати під час уроків та задавати тести та вікторини на домашнє завдання.

5. **Canva** – безкоштовний онлайн-інструмент графічного дизайну (Canva, б. д.). Сервіс допомагає створити навчальні матеріали, можна робити презентації або працювати з онлайн – дошкою. Містить багато різноманітних дизайнів, дозволяє вставляти стікери, відео, фото.

6. **Classtime** – це помічник вчителя, що збагачує ваш урок миттєвою візуалізацією рівня розуміння та прогресу усього класу в живому часі (Classtime, б. д.). Сервіс створений для проведення тестувань у режимі реального часу. З переваг даного сервісу є відбраковування виконання тестування, що дає змогу вчителю одразу побачити найпоширеніші помилки та провести роботу над ними. Також працює автоматична перевірка відповідей учнів за допомогою ІІІ. Для теми «Функції» можна використовувати сесії у реальному часі для миттєвого аналізу типових помилок учнів при знаходженні області визначення складених функцій.

AhaSlides – це хмарне програмне забезпечення для презентацій, створене для того, щоб зробити презентації більш інтерактивними та привабливими (AhaSlides - The Joy of Engagement, б. д.). Сервіс допомагає урізноманітнити презентації, зробити їх більш «живими». Можна додавати різні вправи: опитування, вікторини, хмари слів та інші.

Загальний підсумок щодо використання наведених вище сучасних засобів навчання під час вивчення функцій

Сучасні засоби навчання значно розширюють можливості традиційної освіти, роблячи навчальний процес більш інтерактивним, адаптивним і доступним для всіх учасників. Вони дозволяють підвищити ефективність навчання, сприяючи глибшому засвоєнню знань та розвитку умінь і навичок учнів, зокрема під час вивчення змістової лінії «Функції».

Дослідження показало, що застосування сучасних засобів навчання має такі основні переваги:

- *Персоналізація навчання:* Можливість адаптувати навчальні матеріали до індивідуальних потреб учнів, забезпечуючи більш ефективне засвоєння матеріалу.
- *Покращена візуалізація:* графіки та симуляції допомагають учням краще зрозуміти та засвоїти складні концепції функцій.
- *Залучення учнів:* Використання сучасних технологій робить навчання цікавішим та мотивуючим для учнів.
- *Можливість дистанційного навчання:* Онлайн-платформи та мобільні додатки забезпечують доступ до навчальних матеріалів у будь-який час та з будь-якого місця.

Таким чином завдяки сучасним засобам навчання, вивчення функцій стає більш інтерактивним, захоплюючим і ефективним, що сприяє глибшому розумінню математичних концепцій учнями ліцею. Аналіз сучасних засобів навчання, представлених у розділі, засвідчує, що цифровізація освітнього простору істотно трансформує підходи до вивчення

математичних понять, зокрема однієї з змістових ліній шкільного курсу – «Функції». З огляду на дидактичні особливості цієї змістової лінії (необхідність оперування різними видами задання функцій: графічним, аналітичним, табличним тощо; потреба в динамічній візуалізації; важливість інтерпретації реальних залежностей), доцільним є комплексне використання таких сучасних засобів навчання: електронні та паперові підручники, цифрові навчальні платформи, ІІІ, онлайн-дошки, онлайн – сервіси тощо.

У сукупності зазначені засоби забезпечують повний цикл роботи з поняттям функції – від первинного формування уявлень і динамічної візуалізації до поглибленого аналітичного дослідження та застосування в реальних контекстах. Їх комплексне використання дає змогу реалізувати модель «перевернутого класу» (Годованюк & Васильєва, 2022), у межах якої теоретичний базис опановується за допомогою мультимедійного підручника, а практичне дослідження властивостей функцій здійснюється в динамічних середовищах типу GeoGebra з використанням онлайн-дошки MIRO.

Таким чином, можна стверджувати що сучасні засоби навчання створюють умови для ефективного опанування теми «Функції» завдяки поєднанню інструментів візуалізації, інтерактивності, адаптивності та аналітичної підтримки. Їх застосування відповідає вимогам STEM-освіти, Концепції Нової української школи та процесам цифрової трансформації освіти, що дозволяє розглядати зазначені засоби як педагогічно доцільну й науково обґрунтовану основу організації навчання теми «Функції» в умовах сучасного ліцею.

1.3. Психолого-педагогічні основи вивчення функцій здобувачами освіти різних вікових категорій.

Формування розуміння функціональних залежностей та застосування

функцій до дослідження та аналізу реальних процесів і явищ в учнів є складним когнітивним процесом, що вимагає розвитку абстрактного й логічного мислення, уміння аналізувати та встановлювати взаємозв'язки між змінними, інтерпретувати графічні моделі й переносити знання у практичні ситуації. Пропедевтика вивчення цієї теми здійснюється ще в 5-6 класах. На цьому етапі навчання реалізується через ознайомлення школярів із залежністю між величинами, побудову таблиць відповідностей, графічне зображення числових даних та розв'язування прикладних задач, у яких одна величина змінюється залежно від іншої. Враховуючи вікові особливості учнів 10 – 12 років, зокрема домінування наочно-образного мислення та поступовий перехід до абстрактно-логічного, ефективним є використання задач, що мають реальний зміст, опору на практичний досвід і візуалізацію (Слепкань, 2004, Моляко та ін., 2024).

Водночас на етапі середнього шкільного віку зберігається висока емоційна чутливість учнів до труднощів навчання, тому педагогічна підтримка, позитивна мотивація та доступність навчального матеріалу є критично важливими для повноцінного засвоєння змісту пропедевтики функцій (Слепкань, 2004). Учні починають вивчати функції у 7 класі. Зазвичай підлітковий вік охоплює період від 10 до 19 років. Це учні 5-11 класів. Цей період є одним з особливих у житті дитини. Часто його називають «критичним», «зламним» або «перехідним» віком (Видра, 2010).

Психічний розвиток підлітків характеризується тим, що фактично весь цей період супроводжується кризою, яку умовно називають «криза 13 років». Її передумовою є руйнування старої структури особистості, внутрішнього світу, системи переживань дитини, що були сформовані до цього віку. Основними причинами кризи є наступні: дорослі не змінюють своєї поведінки у відповідь на появу в підлітків прагнень до нових форм взаємин із батьками та вчителями; у поведінці з'являється пряме відображення статевого дозрівання. Суть кризи полягає у глибокій якісній

зміні всього процесу психічного розвитку дитини, її внутрішнього світу (а не в яскравих зовнішніх проявах поведінки) (Видра, 2010). До симптомів кризи належать:

1. Зниження продуктивності навчальної діяльності (а також спроможності нею займатися) навіть у тих сферах, де підліток обдарований (часто це зумовлюється переходом від конкретного до логічного мислення). Саме в цей період (7–8 клас) учні переходять від оперування конкретними числами до абстрактних залежностей $y = f(x)$, що вимагає високого рівня формально-операційного інтелекту (за Ж. Піаже). Невідповідність між темпами когнітивного дозрівання та складністю математичних абстракцій часто стає причиною втрати інтересу до предмета.

2. Негативізм. Підлітки характеризуються вираженою опозиційною спрямованістю поведінки та прагненням до емансипації від дорослих. Схильні до сварок, порушень дисципліни, у них часто виникає внутрішнє занепокоєння, невдоволення, прагнення самотності та самоізоляції (Видра, 2010).

Інтенсивний розвиток та вікові кризи підліткового періоду сприяють формуванню нових психологічних утворень, центральним з яких є самосвідомість. Одним із ключових новоутворень цього віку також виступає відчуття дорослості. На відміну від дошкільного та молодшого шкільного віку, де провідним механізмом розвитку є наслідування, у підлітковому віці відчуття дорослості проявляється через прагнення до інтеграції у світ дорослих, що виявляється у намаганні зайняти відповідне соціальне положення та встановлювати реальні взаєностосунки на рівні дорослих. Основним середовищем де знаходяться підлітки залишається школа, навчаючись в ній учень змінює фокус своєї уваги із навчання на взаємодію з оточуючими. Авторитетність вчителя у такому віці може дуже легко піддаватись сумнівам, адже «значущою» особою для підлітка може стати будь-хто.

Досить часто саме коло спілкування впливає на навчання учнів, воно стає першим пріоритетом, тож навчання відходить на другий план. З'являються нові сфери інтересів, які стають цікавішими за навчання, а вчителю складно донести цікавість та важливість засвоєння предмета. Зміни настрою, незадоволеність колом спілкування впливають на погіршення рівня навчальних досягнень. Спілкування з дорослими теж змінюється. Оскільки учні сприймають себе як «дорослих», вони вимагають відповідного ставлення до себе та погані оцінки можуть сприймати як образу особистості, не асоціюючи це з власними недоопрацюваннями. На основі цього підлітки можуть порушувати поведінку на уроці, не виконувати прохань дорослих, адже вважають що вони краще знають, що і як їм потрібно робити.

Сприйняття інформації змінюється в 10-11 класі коли учні переходять до юнацького віку. Це вік що межує між дитинством та дорослістю. Нова соціальна позиція юнаків змінює для них значущість учіння. У порівнянні з підлітками інтерес до навчання у них підвищується, оскільки складається нова система мотивів щодо учіння: їм потрібно самовизначитись та підготуватись до самостійного життя. Тому провідною діяльністю знову стає навчання, яке в умовах закладів вищої освіти стає професійним. До навчання юнаки ставляться свідомо, позитивно, як до необхідної бази, передумови майбутньої професійної діяльності. Але їх цікавлять предмети, які знадобляться у подальшому житті, це є причиною недостатньої уваги до «непотрібних» їм предметів (Видра, 2010).

Сприймання, стає довірливим, проявляється в перцептивних діях планомірного спостереження за певними об'єктами. Водночас спостерігається концентрація на власних діях, поведінці, емоціях та думках. Довірливість пам'яті зростає, а ефективність логічного запам'ятовування покращується завдяки вдосконаленню та раціоналізації методів запам'ятовування. Молоді люди прагнуть набути здатності керувати своєю

пам'яттю, підвищувати її ефективність та розвивати раціональні стратегії запам'ятовування. Збільшується обсяг, концентрація та швидкість перемикання уваги. Однак зростає і вибірковість уваги, її взаємозалежність із напрямом інтересів, а також посилюється роль довільної уваги після її активації. Така суперечність зумовлює неспроможність концентруватись на чомусь одному, тому майже постійно проявляється неуважність. Відбувається перехід до вищих рівнів абстрактного та узагальнюючого мислення. Наукові поняття стають не тільки предметом вивчення, але й інструментом пізнання. З'являється системність мислення, завдяки чому формується когнітивна модель світу, світогляд. Також з'являється схильність перебільшення рівня своїх знань, розумових можливостей. Формується індивідуальний стиль розумової діяльності, який залежить від психофізіологічних особливостей (Видра, 2010).

Базуючись на загальних принципах психології сприйняття та когнітивних процесів, що описуються в численних підручниках з психології навчання та когнітивної психології, зокрема «Теорію соціального навчання» А. Бандури (1977), можна виділити кілька ключових етапів сприйняття інформації:

1. Сенсорне сприйняття: учні сприймають інформацію через різні органи чуття (зір, слух, дотик, смак, нюх). Сприйняття залежить від того, як чітко і яскраво сприймаються стимули, а також від їхньої значущості для учня.

2. Увага: фокусування уваги є важливим етапом процесу сприйняття. Учні схильні сприймати лише ті стимули, на які спрямована їхня увага. Вибірковість уваги може бути пов'язана з інтересами, мотивацією або рівнем стресу.

3. Когнітивна обробка: інформація обробляється у свідомості учня, де вона може бути асоційована з попередніми знаннями або ж інтерпретована

з погляду особистого досвіду. Тут значну роль відіграє пам'ять, здатність до узагальнення та логічного мислення.

4. Емоційний фактор: емоції можуть суттєво впливати на сприйняття інформації. Позитивні емоції можуть покращити запам'ятовування та засвоєння матеріалу, в той час, як негативні можуть створювати бар'єри до ефективного навчання.

5. Інтерпретація і розуміння: інтерпретація матеріалу залежить від рівня розвитку когнітивних здібностей учнів, їхніх знань, а також мотивації до навчання. Учні можуть по-різному інтерпретувати однакову інформацію залежно від особистісних особливостей.

6. Зворотний зв'язок і корекція: після сприйняття та осмислення інформації учні отримують зворотний зв'язок, який допомагає коригувати та вдосконалювати свої знання, що сприяє кращому розумінню матеріалу.

У цей час навчання займає більшу частину часу в житті дитини. Всі ці психічні особливості проявляються у поведінці, сприйнятті навчального матеріалу, готовності до співпраці, а також у варіативності мислення. Хоча учіння втрачає свою провідну значущість для психічного розвитку підлітків, поступаючись довірливому спілкуванню з ровесниками, однак все одно залишається провідним чинником розвитку їх інтелекту та платформою для реалізації комунікативної функції (Столярчук, 2022). Дослідження проведене О. Столярчук (додаток М) показує, що мотивацією є професійний ріст (1 – 2 позиція рейтингу) та особистісний розвиток (3 позиція). Також не втрачає актуальності спілкування з однолітками – 4 позиція в даному рейтингу вказує на значний вплив на навчання. А винагорода від дорослих, вплив батьків та вчителів грає найменшу роль (додаток М). У варіантах відповіді, сформульованих самими підлітками щодо причин їхнього навчання фігурують виразники як внутрішньої мотивації – свідомого ставлення до навчання («Школа – це соціальний інструмент, який вчить бути людьми», «Це мій обов'язок, так треба»), так і домінування сполук

зовнішнього походження («Щоб не сварили батьки», «Щоб хвалили батьки» тощо) (Столярчук, 2022). Аналізуючи отримані результати дослідження (Столярчук, 2022) можемо побачити, що найбільший вплив є професія, успішний розвиток кар'єри та учня, як особистості. Але складна ситуація в країні пов'язана з військовим станом, впливає на навчання і створює додатковий тиск на учнів. Навчатися стає важче через фізичну втому, безсоння, стрес через обстріли та страх за власне життя, зміну місця проживання та адаптацію до нових реалій. В умовах тривалого стресу, спричиненого військовою агресією, у підлітків спостерігається зниження когнітивного ресурсу: увага стає фрагментарною, а здатність до тривалої інтелектуальної концентрації (необхідної для дослідження функцій) – обмеженою. Це зумовлює потребу в мікронавчанні (microlearning) та частішій зміні видів діяльності на уроці.

Ці умови зберігають та посилюють емоційність учнів, додаючи швидких та постійних змін у ставленні до себе та навколишньої дійсності. Що підтверджує дослідження О. Столярчук (додаток Н). Аналізуючи результати цього опитування бачимо, що емоційний супровід навчання підлітків є неоднозначним, однак переважають негативні емоції. Найбільш поширеними є втома (61,1%), нудьга (51,3%) та байдужість (41,6%), що займають перші позиції у рейтингу. Це свідчить про низьку мотивацію та залученість у навчальний процес. Серед позитивних емоцій найбільше виражений інтерес (58,6%), який посідає 2-ге місце у рейтингу. Це вказує на те, що, попри загальну втому та нудьгу, частина учнів все ж відчуває зацікавленість до навчання. Водночас радість (21,2%) та захоплення (36,6%) зустрічаються значно рідше, що може свідчити про недостатню емоційну залученість підлітків у навчальний процес. Серед негативних емоцій також присутні тривога (22,5%), сум (20%) та злість (17,9%), що може вказувати на певний рівень стресу та незадоволеності навчанням. Найменше виражене почуття провини (6,7%), що займає останню позицію.

Загалом, аналіз таблиці вказує на значну перевантаженість і втому підлітків, а також на недостатню емоційну залученість у навчальний процес, що потребує вдосконалення методів навчання та мотивації учнів.

Дослідження психолого-педагогічних основ навчання у різних вікових категоріях засвідчує, що процес засвоєння математичних понять значною мірою залежить від вікових особливостей когнітивного розвитку, мотивації та рівня сформованості абстрактного мислення. У молодшому шкільному віці навчання має спиратися на наочність, маніпуляції з конкретними об'єктами та поступовий перехід до узагальнень. На цьому етапі важливо формувати інтуїтивне розуміння математичних понять. У підлітковому віці відбувається розвиток абстрактно-логічного мислення, що дозволяє учням опановувати складніші математичні поняття, теоретичні узагальнення та алгебраїчні операції. Однак емоційні чинники, такі як мотивація та інтерес, суттєво впливають на ефективність засвоєння матеріалу, що потребує використання сучасних засобів навчання, проблемного підходу та міждисциплінарних зв'язків. У старшому шкільному віці зростає здатність до узагальнення, формалізації, математичного моделювання та застосування математичних методів у різних сферах науки та практики. Важливим є розвиток критичного мислення, самостійного аналізу та математичного моделювання, що сприяє підготовці до професійної діяльності.

Таким чином, ефективне навчання математики потребує вікової диференціації підходів, адаптації методів викладання відповідно до рівня когнітивного розвитку, урахування психолого-педагогічних факторів, що сприяють формуванню математичної компетентності, а також формування мотивації та інтересу до предмета через практичне застосування математичних знань. Аналіз психолого-педагогічних особливостей розвитку учнів різного віку свідчить, що опанування поняття функції є поетапним процесом, який передбачає поступовий перехід від конкретних

уявлень до абстрактного мислення. Ефективність засвоєння теми визначається рівнем когнітивного розвитку, мотиваційно-емоційним станом та специфікою пізнавальної діяльності на кожному віковому етапі.

У молодших підлітків (10–12 років) домінує наочно-образне мислення, що зумовлює доцільність використання реальних ситуацій, таблиць відповідностей, графічних схем та інтерактивних вправ, які забезпечують формування інтуїтивних уявлень про залежності між величинами. Підтримка позитивної мотивації та створення ситуацій успіху є критичними для засвоєння пропедевтики функцій.

У середньому підлітковому віці (13–15 років) формально-логічне мислення інтенсивно розвивається, але супроводжується емоційною нестабільністю, зниженням навчальної працездатності та потребою в автономії. Це вимагає орієнтації навчання на дослідницьку діяльність, інтерактивність, групову роботу та графічні інтерпретації функцій. Мотиваційний потенціал підсилюють гейміфікація, аналіз реальних даних і завдання, що дозволяють учням відчути власну «дорослість».

У старшокласників (16–19 років) сформованість абстрактного та системного мислення створює підґрунтя для поглибленого аналізу функцій, математичного моделювання та міждисциплінарного застосування. Використання реальних наборів даних, цифрових середовищ (GeoGebra, Desmos) та інструментів ІІІ сприяє розвитку аналітичних умінь і професійно орієнтованого мислення. Оскільки у старшому шкільному віці провідною стає навчально-професійна діяльність, використання ІКТ (Desmos, GeoGebra) сприймається учнями не як розвага, а як інструмент професійної діяльності математика, інженера чи аналітика, що відповідає їхньому запиту на дорослість та практичність знань.

Отже, опанування матеріалу змістової лінії «Функції» повинно ґрунтуватися на вікових закономірностях розвитку, передбачати адаптацію змісту й методів навчання відповідно до когнітивних можливостей та

мотиваційної сфери учнів. Нами, в дослідженні, враховані ці чинники під час вивчення змістової лінії функції учнями ліцею.

Висновки до 1 розділу

Проведений у першому розділі дисертаційного дослідження аналіз історико-педагогічних аспектів вивчення змістової лінії «Функції» свідчить, що формування уявлень про функції в українській шкільній математичній освіті є результатом тривалої еволюції, зумовленої суспільно-політичними змінами, трансформаціями наукової парадигми та модернізацією освітніх документів. У XX столітті методика вивчення змістової лінії «Функції» пройшла шлях від прикладного генетичного підходу першої половини століття через радикальну теоретико-множинну модернізацію 1960–1970-х років (реформа А. Колмогорова) до пошуку балансу між науковою строгістю та доступністю у 1980–1990-х роках. Попри значну еволюцію від наочно-практичних методів до системного математичного аналізу, методика цього періоду залишалася обмеженою статичністю паперових носіїв, що зумовлювало домінування репродуктивних методів навчання та дефіцит динамічної візуалізації, яка стала доступною лише з появою сучасних цифрових інструментів.

У сучасній шкільній освіті традиційні методи, засоби та організаційні форми навчання не відкидаються повністю, але суттєво доповнюються сучасними методами, засобами та формами навчання. Зокрема, динамічна візуалізація побудови графіків функцій допомагає, зробити процес навчання більш звичним та привабливим для сучасного учня. Це не лише підвищує пізнавальний інтерес через елементи гейміфікації, а й полегшує сприйняття складного абстрактного матеріалу. З методичної точки зору, такий підхід суттєво прискорює процес побудови графіків функцій, вивільняючи час для аналізу їхніх властивостей, а також сприяє активному формуванню інформаційно-цифрової компетентності школярів.

У цьому розділі ми також показали, що ефективне навчання математики потребує вікової диференціації підходів, адаптації методів викладання відповідно до рівня когнітивного розвитку, урахування психолого-педагогічних факторів, що сприяють формуванню математичної компетентності, а також формування мотивації та інтересу до предмета через практичне застосування математичних знань. Аналіз психолого-педагогічних особливостей розвитку учнів різного віку свідчить, що опанування поняття функції є поетапним процесом, який передбачає поступовий перехід від конкретних уявлень до абстрактного мислення. Ефективність засвоєння теми визначається рівнем когнітивного розвитку, мотиваційно-емоційним станом та специфікою пізнавальної діяльності на кожному віковому етапі.

Важливість вивчення матеріалу змістової лінії «Функції» слід розкривати через прикладні задачі з економіки, біології та фізики, що дозволяє учням бачити у функціях не просто формули, а дієвий інструмент для опису та прогнозування процесів і явищ навколишнього світу. Використання сучасних засобів навчання (мультимедійні дошки, цифрові ресурси, онлайн-платформи та програмне забезпечення для побудови графіків функцій) сприяє покращенню результатів навчання (наприклад, через візуалізацію абстрактних понять із теми «Функції») та розширює можливості для індивідуального підходу до кожного учня.

У сукупності зазначені в розділі сучасні засоби навчання забезпечують повний цикл роботи з поняттям функції – від первинного формування уявлень і динамічної візуалізації до поглибленого аналітичного дослідження та застосування в реальних контекстах. Їх комплексне використання дає змогу реалізувати різні моделі навчання, у межах яких теоретичний базис опановується за допомогою мультимедійного підручника, а практичне дослідження властивостей функцій здійснюється в

динамічних середовищах типу GeoGebra з використанням онлайн-дошок та інших засобів навчання.

Таким чином, удосконалення методики навчання змістової лінії «Функції» учнями ліцею має спиратися на поєднання традиційних технологій навчання з сучасними засобами навчання, компетентнісним підходом, індивідуалізацією навчальної діяльності та розвитком умінь працювати з графічними моделями й інформаційними ресурсами. У наступному розділі ми детальніше розглянемо методику використання сучасних засобів навчання під час вивчення функцій учнями ліцею.

РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ СУЧАСНИХ ЗАСОБІВ НАВЧАННЯ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ФУНКЦІЙ УЧНЯМИ ЛІЦЕЮ.

2.1. Концептуальна модель використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею.

У процесі дослідження вивчення учнями змістової лінії «Функції» було виявлено низку проблем пов'язаних не лише з дидактичними аспектами цієї змістової лінії, а і зі зміною освітньої траєкторії, де традиційні методики вже не гарантують належного рівня розуміння та зацікавленості учнів (Алексєєва, 2023; Canto López та ін., 2022; Veesar & Khaskheli, 2019). Державний стандарт профільної середньої освіти (КМУ, 2024) передбачає розвиток в учнів 11 ключових компетентностей: вільне володіння державною мовою, здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами, математична компетентність, компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій, інноваційність, екологічна компетентність, інформаційно-комунікаційна компетентність, навчання впродовж життя, громадянські та соціальні компетентності, культурна компетентність, підприємливість і фінансова грамотність (МОН України, 2020). Інформаційно-комунікаційна, математична, інноваційна компетентності потребують застосування сучасних засобів в процесі навчання математики. Для формування кожної з цих компетентностей під час навчання математики потрібен аналіз, обробка, інтерпретація результатів, застосування математичних засобів до розв'язання життєвих задач тощо. Державний стандарт підкреслює важливість:

- інформаційно–комунікаційних технологій для ефективного розв'язання математичних задач;
- генерування нових ідей щодо розв'язання проблемної ситуації, аналізувати й планувати їх втілення;

- відкритості до інновацій, позитивне оцінювання і підтримка конструктивних ідей інших осіб;

- уміння встановлювати кількісні та просторові відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо);

- обирати, створювати та досліджувати прості математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати;

- здійснювати прогнози в контексті навчальних і практичних задач;

- застосовувати логічні способи мислення під час розв'язування пізнавальних і практичних задач, пов'язаних із реальними об'єктами;

- використовувати математичні методи в життєвих ситуаціях;

- усвідомлення ролі математики як мови науки, техніки та технологій.

Тому пропонована нами концептуальна модель ґрунтується на таких підходах:

- Компетентнісний: орієнтується на визначені компетентності в державному стандарті та формує їх через діяльність.

- Діяльнісний: активне залучення учнів до вивчення та дослідження функцій.

- Системний і цілісний: поєднання цілей, змісту, методів і засобів визначених у державному стандарті, навчальних програмах та концептуальних моделях.

- Технологічний: використання сучасних цифрових інструментів.

- Особистісно орієнтований: врахування індивідуальних освітніх потреб учнів.

Враховуючи педагогічний досвід багатьох вчителів (Года, 2022) та аналіз навчальних потреб сучасного підлітка, ми пропонуємо таку концептуальну модель вивчення змістової лінії «Функції», що поєднує індивідуалізацію освітнього процесу, цілеспрямоване використання сучасних цифрових засобів та увагу до психолого-педагогічних

особливостей учнів підліткового віку. Ця концептуальна модель пропонується нами для забезпечення ефективного формування ключових і предметних математичних компетентностей учнів ліцею через системне та цілеспрямоване використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції». Розглянемо її структуру (табл. 2. 1).

Таблиця 2. 1.

Структура концептуальної моделі

Структура	Суть
Цільове призначення	Визначення освітніх цілей, очікуваних результатів, компетентностей. Аналіз навчальних потреб учнів, визначення мети та завдання навчання, встановлення навчальних цілей. Дослідження психологічного стану учнів та готовності до навчання. Визначення освітніх втрат.
Зміст	Теми та поняття функціональної лінії (вид функції, графік, нулі, область визначення тощо)
Організаційно – діяльнісний етап	Методи, форми, інструменти (цифрові середовища, графічні редактори, динамічні моделі, тренажери). Побудова індивідуальної траєкторії навчання, враховуючи всі особливості, для досягнення очікуваного результату. Створення цілісної навчальної системи шляхом використання сучасних засобів навчання.
Оцінювально – результативний етап	Критерії, індикатори, інструменти оцінювання результатів (формувальне оцінювання, тести, саморефлексія).

Описана модель спирається на ідею поетапного формування уявлень про функції, їх властивості, графіки та застосування до розв'язування задач: від візуального та інтуїтивного сприйняття (зокрема в динамічних середовищах на кшталт GeoGebra) до аналітичного опрацювання задач, що вимагають встановлення зв'язків між різними способами задання функції. Особлива увага приділяється створенню умов для осмисленої діяльності кожного учня через варіативність ресурсів, адаптивне оцінювання, проєктну роботу та формування міжпредметних зв'язків (наприклад, із фізикою, економікою, інформатикою).

Важливою складовою потреби у створенні концептуальної моделі вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею стало також прагнення подолати освітні втрати (Лук'янова & Філон, 2023), спричинені дистанційним навчанням і нестабільними умовами воєнного часу: для цього в моделі передбачено гнучке планування, опору на діагностичні інструменти та підтримку індивідуальних освітніх траєкторій (додаток А). У такий спосіб запропонована концептуальна модель не лише сприяє кращому засвоєнню поняття функції, а й формує здатність учнів бачити міжпредметні закономірності, працювати в цифровому середовищі та аналізувати навчальний процес.

У наступних параграфах розділу ми описуємо реалізацію запропонованої концептуальної моделі використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею та розкриваємо її експериментальну перевірку. Це здійснюється наступним чином:

1. Розробка методичних рекомендацій для вивчення тригонометричних, показникової, степеневої та логарифмічної функцій.
2. Створення цифрового навчального середовища (Classroom, чат-бот, сайт та ін.), яке буде містити всі необхідні засоби та матеріали для вивчення функцій учнями ліцею.

3. Розробка практичних рекомендацій, щодо використання сучасних засобів навчання.

Очікувані результати реалізації концептуальної моделі використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею узгоджуються з положеннями Державного стандарту профільної середньої освіти (КМУ, 2024), орієнтовані на формування ключових та предметних компетентностей учнів, передбачених Типовими освітніми програмами, та забезпечують досягнення цілей математичної освіти у ліцеї. Виокремимо очікувані результати навчання учнів (табл. 2.2)

Таблиця 2.2

Очікувані результати впровадження моделі

Компетентність	Очікуваний результат учня
Математична	Розуміння поняття функції як залежності між змінними величинами, учень може описати її словесно, аналітично, графічно чи задати таблицею. Вміння будувати та аналізувати графіки тригонометричних, показникової, степеневої та логарифмічних функцій, визначає їх властивості (монотонність, неперервність, область визначення та множина значень, опуклість, вгнутість, точки перегину та ін.). Застосовує функціональні залежності та відповідні властивості до розв'язання практичних задач. Може обґрунтувати та доцільно обрати функцію та відповідні інструменти для дослідження функцій відповідно до поставленої задачі.

Інформаційно – цифрова	Використовує цифрові засоби (GeoGebra, Desmos, Excel та ін.) для побудови та дослідження графіків функцій. Самостійно обирає необхідні цифрові інструменти, знаходить та аналізує інформацію, перевіряє достовірність джерел. Вміє продемонструвати засвоєння теми та здійснити рефлексію шляхом використання цифрових засобів.
Уміння вчитися протягом життя	Самостійно планує і виконує навчальні дії, обирає потрібні ресурси, визначає послідовність кроків для дослідження функції. Здійснює саморефлексію навчальної діяльності. Вміє використовувати та використовує інструменти самооцінювання.
Ініціативність та підприємливість	Розв’язує задачі економічного змісту, які потребують функціонального інструментарію. Використовує функції для моделювання реальних ситуацій. Використовує функції для доведення та підтвердження тезисів та результатів власної роботи.
Комунікативна та соціальна компетентності	Працює в групі. Чітко висловлює свої думки, аргументує висновки. Демонструє толерантність та комунікативність.

Таблиця 2 показує, що вивчення даної змістової лінії «Функції» спрямоване не тільки на вивчення математики, а й на розвиток ключових компетентностей учнів, визначених новим Державним стандартом (КМУ, 2024). Наприклад, реалізацію компетентнісного підходу можна здійснити таким чином:

- **Математична компетентність:**

Учень будує графік функції $y = 2^x$ у Desmos, знаходить її область визначення, проміжки зростання, а потім порівнює з функцією $y = \log_2 x$, аналізуючи їх симетрію відносно прямої $y = x$.

- **Інформаційно-цифрова:**

У GeoGebra учень моделює задачу:

Попит на товар задано рівнянням $Q_D = 10 - P$, а пропозицію – рівнянням $Q_S = -8 + 2P$. Визначте рівноважну ціну та рівноважну кількість продажу. Відповідь підтвердіть графічно. Що станеться на ринку, якщо держава встановить ціну на даний товар 5 грн та 1 од.? Виробники продаватимуть даний товар по 7 грн за 1 од.? Залежність прибутку магазину від ціни товару (Ткач, 2011).

Учень змінює параметри функції, спостерігає за графіком і робить висновки про рівноважну ціну.

- **Уміння вчитися впродовж життя:**

Учень обирає тему для мініпроєкту «Банківські розрахунки та показникова функція», досліджує принципи банківських розрахунків, зокрема нарахування відсотків, оцінює вигоду депозитних і кредитних програм.

- **Ініціативність та підприємливість:**

Учень розв'язує задачу: «Виробнича функція фірми має вигляд $Q = 4 \cdot L^{\frac{2}{3}} \cdot K^{\frac{1}{3}}$. Фірма прагне виробляти 8 од. продукції за годину робочого часу. При цьому відомо, що ціна 1 од. капіталу становить 3 грн за годину, а ціна 1 од. праці за годину – у 4 рази дешевше. Визначте комбінацію ресурсів, яка забезпечить мінімізацію витрат на даний обсяг виробництва та мінімальну вартість виробництва» (Ткач, 2011).

- **Комунікативна та соціальна:**

Працюючи в групі, учні захищають проєкт: «Банківські розрахунки та показникова функція», де кожен учасник відповідає за окремий аспект: дані,

графіки, висновки.

Результати концептуальної моделі слід оцінювати за низкою показників: рівень сформованості предметних компетентностей, вміння використовувати сучасні засоби навчання для розв'язання задач, позитивну динаміку навчальних досягнень, рівень мотивації та здатність до рефлексивного самооцінювання. Таким чином, очікувані результати реалізації концептуальної моделі мають засвідчити про її потенціал як інструменту формування розуміння функціональних залежностей та застосування функцій до дослідження та аналізу реальних процесів, розвитку математичного мислення та забезпечення цілісної реалізації компетентнісного підходу у навчанні математики згідно цифрової трансформації освіти, відповідно до Концепції НУШ.

2.2. Загальні підходи до реалізації концептуальної моделі під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею.

Відповідно до Державного стандарту профільної середньої освіти (КМУ, 2024) *«метою математичної освітньої галузі є розвиток особистості здобувача освіти через формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі; розвиток логічного мислення та психічних властивостей особистості; здатність і готовність застосувати математику в особистому і суспільному житті для продовження навчання або фахової самореалізації»* (КМУ, 2024). Згідно з нормативними документами (КМУ, 2024, МОН України 2024) базовими знаннями для змістової лінії «Функції» є *«функціональні залежності; алгебраїчні і трансцендентні функції та їх властивості; складені функції; оборотні і*

необоротні функції; числові послідовності та їх властивості; елементи математичного аналізу» (МОН України 2024).

Оскільки у старшій школі вивчаються нові класи функцій, які зазвичай сприймаються учнями важче, ніж ті класи функцій, що вивчалися в базовій середній школі, то методика їх навчання, крім традиційних, потребує також і нових підходів. У цьому контексті сучасні засоби навчання стають не просто візуалізаторами, а інструментами дослідження властивостей функцій. Розглянемо детальніше методичні особливості вивчення степеневі, тригонометричних, показникової та логарифмічної функцій, під час якого сучасні засоби навчання сприяють виявленню закономірностей, аналізу параметричних залежностей та розв'язанню прикладних задач.

Цільове призначення

Освітні цілі:

- Когнітивний та особистісний розвиток: розвиток фундаментальних мисленнєвих процесів (вивчення функцій спрямоване на розвиток логічного мислення, просторової уяви, розумової активності та критичного аналізу інформації); формування цілісного світогляду (вчитель має сформувати в учнів системне уявлення про функції, що дозволяє сприймати тему «Функції» не просто як окремий розділ, а як органічну частину курсу математики та ключовий елемент цілісної системи навчання); виховання самостійності та відповідальності (розвивати навички самоосвіти, дисципліни, автономності та здатності свідомо керувати власним навчанням (self-regulated learning)).
- Академічна та практична підготовка: глибоке засвоєння та систематизація знань (метою є не лише запам'ятовування, а й узагальнення знань про властивості функцій, їх графічну інтерпретацію та аналітичні перетворення); математичне моделювання реальних процесів (однією з головних цілей є формування вміння застосовувати абстрактні функції для

опису реальних явищ у фізиці, економіці, логістиці та соціальних процесах); застосування у житті (підготовка учнів до використання функцій та їх властивостей в особистому та суспільному житті для професійної самореалізації та прийняття обґрунтованих рішень).

Очікувані результати:

Відповідно до вимог Державного стандарту (КМУ, 2024) та чинних модельних навчальних програм МОН України, проєктування методичної системи вивчення функцій орієнтовано на досягнення чітко визначених нормативних очікуваних результатів навчання учнів. У контексті дослідження ці результати диференційовано за двома ключовими напрямками:

- Предметно-математичні результати: будувати, аналізувати та досліджувати властивості графіків степеневі, тригонометричних, показникової та логарифмічної функцій; розуміти вплив параметрів (наприклад, основи a або показника степеня) на вигляд та поведінку графіка; встановлювати зв'язок між функціями, рівняннями та нерівностями; знати та застосовувати основні співвідношення, формули та властивості функцій; визначати область визначення, множину значень, парність/непарність, періодичність та проміжки монотонності функцій.

- Прикладні та моделювальні результати: математичне моделювання (вміння описувати реальні процеси, такі як фізичні коливання, демографічні зміни, поширення вірусного контенту за допомогою відповідних функцій); фінансова та практична грамотність (здатність розв'язувати задачі економічного, фізичного змісту тощо); критична інтерпретація (вміння пояснювати, чому математична модель може стати нереалістичною на певних етапах).

Компетентності:

Формування ключових компетентностей здобувачів освіти нормативно закріплено в Державному стандарті (КМУ, 2024) та чинних

модельних програмах МОН України. Під час реалізації запропонованої нами концептуальної моделі пропонуємо розвивати ключові компетентності через використання сучасних засобів навчання, практико-орієнтованих завдань та активних методів навчання, що дозволяє трансформувати абстрактні поняття змістової лінії «Функції» у дієві життєві навички.

Основні підходи до розвитку конкретних компетентностей включають:

1. Математична та природничо-наукова компетентності

- Моделювання реальних процесів: учні вчаться використовувати функції для опису циклічних явищ, біологічних процесів та фізичних розрахунків тощо.

- Дослідницький підхід: замість простого розв'язування завдань пропонуємо аналізувати, чому саме конкретна функція (наприклад, тригонометрична через її періодичність) доречна в даній ситуації.

- STEM-підхід: реалізація математичних моделей за допомогою коду на Python для порівняння ручних обчислень із програмними тощо.

2. Інформаційно-цифрова компетентність

- Робота з динамічними середовищами: використання GeoGebra та Desmos для візуалізації та дослідження того, як зміна параметрів впливає на графік функції («змінюй і дивись»).

- Критичне використання ІІІ: застосування ChatGPT для генерації завдань із навмисними помилками, які учні мають знайти та обґрунтувати, виступаючи в ролі «експертів-аналітиків».

- Використання освітніх платформ: організація навчання в Google Classroom, використання Khan Academy для самостійного опрацювання та YouTube/TED-Ed для дослідження використання функцій у житті.

3. Уміння вчитися впродовж життя

- Індивідуальні освітні траєкторії: побудова гнучких маршрутів навчання через вебквести в Google Classroom, що дозволяє учням

працювати у власному темпі, розвиваючи самодисципліну та відповідальність.

- Self-regulated learning: формування навичок свідомого керування власним навчанням: від постановки цілей до критичного оцінювання прогресу через картки самоаналізу та рефлексію.

4. Ініціативність, підприємливість та фінансова грамотність

- Кейс-метод та прикладні задачі: розв'язання задач на розрахунок доходів блогерів, аналіз стартапів доставки їжі чи вибір найбільш вигідної стратегії банківського депозиту тощо.

- Аналіз даних: використання електронних таблиць (Excel/Google Sheets) для аналізу коливань інфляції, прогнозів продажів та оптимізації ресурсів тощо.

5. Соціальна, громадянська та культурна компетентності

- Кооперативне навчання: робота в парах та малих групах над спільними проєктами в Padlet або Google Docs, що розвиває навички комунікації та взаємооцінювання.

- Міжпредметні зв'язки: вивчення тригонометрії через музичну гармонію (акорд як накладання синусоїд), періодичність у вишивці або аналіз демографічних хвиль тощо.

- Громадянська відповідальність: розрахунок кутів нахилу пандусів для забезпечення доступності або аналіз екологічних моделей тощо.

Аналіз навчальних потреб учнів: це комплексна діагностика, що охоплює когнітивні, методичні, практичні та психологічні аспекти. Це є першим і ключовим кроком для побудови індивідуальної освітньої траєкторії та подолання освітніх втрат. Аналіз потреб включає такі складові:

1. Категорії навчальних потреб

- Когнітивні потреби: учні мають потребу в наочності, глибокому концептуальному розумінні матеріалу змістової лінії «Функції» та встановленні зв'язків із раніше вивченими темами.

- Методичні потреби: запит на чітке означення поняття «функції», структурованість та поетапність вивчення властивостей функцій, їх прикладного застосування.

- Практичні та прикладні потреби: необхідність розв’язувати контекстні задачі за допомогою функцій та використовувати сучасні засоби навчання.

- Психологічні потреби: потреба в підтримці, зниженні страху перед помилкою та застосуванні диференційованого підходу, що враховує індивідуальні особливості.

2. Виявлення типових труднощів

- Освітні втрати: значні прогалини в знаннях із теми «Функції» за попередні роки (8–9 класи) через дистанційне навчання або стресові умови.

- Інформаційно-цифрова компетентність: неоднаковий рівень володіння інструментами (GeoGebra, Python), що може відволікати від суті завдання – замість аналізу властивостей функцій, їхніх графіків та математичних закономірностей учні витрачають основний ресурс на технічну реалізацію.

- Психологічні бар’єри: зниження мотивації, страх зробити помилку та недостатня навичка самонавчання, які можуть виникнути через високий рівень абстрактності поняття функції, складністю графічної інтерпретації прикладних задач та переходу від формульного задання функцій до графіків функцій.

3. Процес та інструменти діагностики

- Інструменти: використовуються мобільні опитування та гейміфіковані платформи, такі як Kahoot, Quizizz, Mentimeter, Classtime або Google Форми, наприклад тест «Степенева функція» (рис. 2. 1).

- Мета діагностики: виявити «вузькі місця» в знаннях зі змістової лінії «Функції», визначити теми, що потребують повторення, та встановити рівень освітніх втрат.

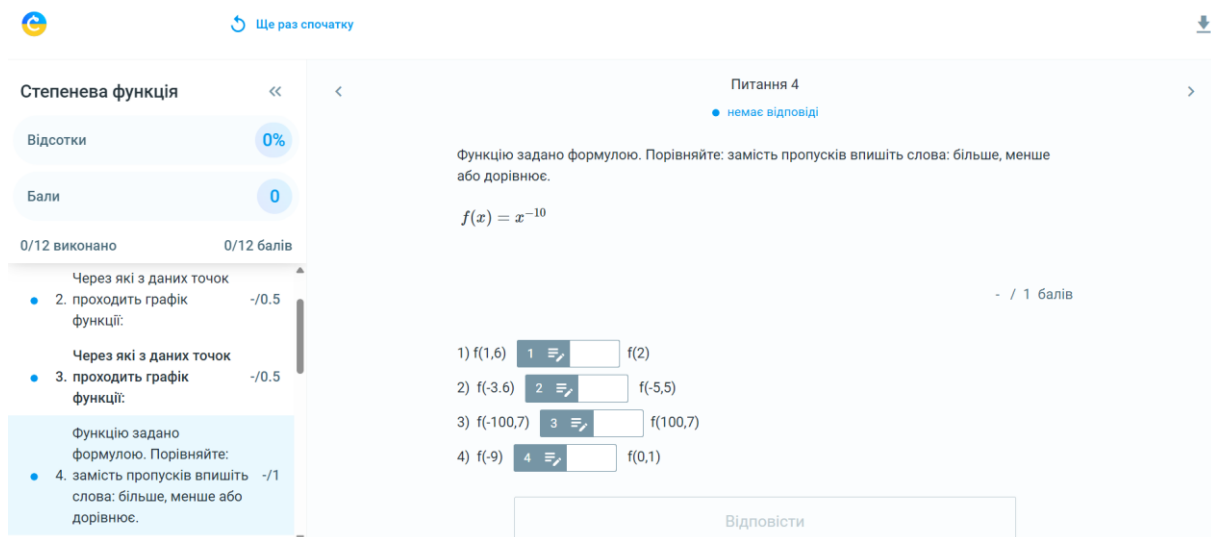


Рисунок 2. 1. Тест «Степенева функція» у Classtime

4. Моніторинг психологічного стану

Аналіз навчальних потреб учнів передбачає дослідження готовності до самостійного навчання (self-regulated learning): підтримка вчителя, чітка структура та цифрові інструменти допомагають учням свідомо керувати власним навчанням, ставити цілі та критично оцінювати свій прогрес. У контексті вивчення функцій це реалізується через покроковий самоконтроль при дослідженні їх властивостей, вибір способу задання функції та використання динамічної наочності для самостійного виявлення й виправлення помилок.

Визначення мети:

- Академічна та системна мета: засвоєння системи знань (метою є успішне опанування властивостей функцій, їхніх графіків та застосування до розв'язання прикладних задач); систематизація та поглиблення (для певних тем (наприклад, степеневої функції) метою є узагальнення та поглиблення вже наявних знань); подолання освітніх втрат (актуальною метою в сучасних умовах є ліквідація прогалин у знаннях, що виникли через дистанційне навчання чи інші зовнішні чинники).
- Практична та прикладна мета: математичне моделювання (навчити учнів використовувати функції для опису та аналізу реальних процесів у

фізиці, економіці, логістиці, біології та медіа тощо); життєва самореалізація (формування здатності та готовності застосовувати отримані знання в особистому та суспільному житті, а також для продовження навчання чи професійної реалізації); прийняття рішень (розвиток уміння приймати обґрунтовані рішення на основі математичних розрахунків (наприклад, аналіз банківських депозитів чи прогнозів зростання популярності контенту)).

Отже, головною метою є не просто вивчення абстрактних формул, а трансформація математичних знань у дієвий інструмент для розуміння навколишнього світу та розв'язання практичних завдань.

Завдання навчання:

- розвивати ключові психічні та інтелектуальні якості, зокрема: логічне мислення (через аналіз причинно-наслідкових зв'язків та зв'язків функцій із іншими темами математики та інших предметів), просторову уяву (через візуалізацію графіків функцій та моделювання задач прикладного змісту у GeoGebra, Desmos або інших графічних калькуляторах), академічну культуру та розумову активність;
- формувати здатність до самоосвіти, ініціативності та роботи в команді: через виконання дослідницьких проєктів, цифрових та лабораторно-практичних завдань із побудови графіків функцій, дослідження їх властивостей та аналізу функціональних моделей;
- формувати цілісний науковий світогляд, уявлення про математику як невід'ємний складник загальної культури людства та її роль у пізнанні світу, а також плекати загальнолюдські, національні та громадянські цінності: через використання та осмислення поняття функції як мови опису реальних динамічних процесів, природних явищ і суспільних тенденцій;
- забезпечити оволодіння складниками математичної компетентності, які необхідні для повсякденного життя, успішної фахової діяльності та подальшого навчання: сформувати вміння аналізувати графіки функцій, які

описують реальні процеси (зміна температури, курси валют та інші), інтерпретації графіків функцій в контексті завдання;

- сформувати вміння ефективного застосування математичних методів, що включає: ідентифікацію проблем, які можна розв'язати засобами математики (виявлення реальних ситуацій, які можна описати за допомогою функцій); здійснення моделювання, розв'язування та критичне оцінювання результатів (складання математичних моделей (формул, таблиць, графіків) для реальних процесів, їх розв'язування за допомогою обраної функції); прийняття рішень в умовах різного типу інформації (точної, ймовірнісної, неповної);

- сприяти вільному володінню математичною мовою, розумінню символіки, формул і моделей як інструментів для опису властивостей об'єктів, процесів і явищ (забезпечити вільне оперування функціональною символікою $y = f(x)$, $D(f)$, $E(f)$, вміння переходити між різними способами задання функції тощо);

- навчити учнів/учениць обґрунтовувати й доводити математичні твердження, оцінювати раціональність розв'язування, а також використовувати математичні знання та вміння під час вивчення інших навчальних дисциплін: сформувати вміння обґрунтовувати доцільність використання конкретної функції при розв'язанні прикладних задач тощо;

- удосконалювати вміння працювати з навчальними та науковими текстами, шукати, критично оцінювати, аналізувати та узагальнювати додаткову інформацію для формування обґрунтованих висновків: розвивати навички аналізу та критичної оцінки графічної інформації, поданої в медіа, науково-популярній літературі чи цифрових ресурсах, виявлення спотворень або хибних висновків при інтерпретації графіків функцій (Нелін та ін., 2026).

Навчальні цілі (за таксономією Блума):

1. Знання (запам'ятовування): учень відтворює означення поняття

«функція», аргументу, залежної змінної, області визначення $D(f)$ та області значень $E(f)$; перелічує та впізнає основні способи задання функції; відтворює формули, графіки та властивості основних елементарних функцій.

2. Розуміння: учень пояснює сутність функціональної залежності як відповідності, де кожному значенню аргументу відповідає єдине значення функції; пояснює зміст властивостей функції; інтерпретує та здійснює взаємний перехід між різними способами задання однієї й тієї ж функції.

3. Застосування: учень обчислює значення функції за заданим аргументом та знаходить значення аргументу за значенням функції у типових вправах; будує графіки вивчених функцій та знаходить їхні властивості за графіком; може використовувати різні інструменти для візуалізації та точної побудови функцій за алгоритмом; застосовує властивості функцій для розв'язування типових рівнянь і нерівностей.

4. Аналіз: учень досліджує складніші функціональні залежності, розкладаючи процес дослідження на окремі логічні етапи; порівнює поведінку різних графіків функцій, виявляє спільні та відмінні риси їхніх графіків і властивостей; досліджує вплив зміни параметрів у аналітичному заданні функцій на форму та розміщення графіка функції у координатній площині.

5. Оцінювання: учень критично оцінює доцільність і раціональність вибору способу розв'язання задачі; перевіряє правильність побудованої функціональної моделі для реального процесу, виявляє можливі помилки.

6. Творення (синтез): учень складає функціональну модель реальної ситуації чи фізичного/економічного процесу на основі поданої інформації; поєднує різні математичні методи та інструменти для дослідження функцій; розробляє власні дослідницькі завдання, міні-проекти тощо.

Дослідження психологічного стану учнів та готовності до навчання:

Готовність учнів до свідомого керування власним навчанням

залежить від зниження когнітивного й емоційного навантаження через підтримку вчителя, візуалізацію абстрактних понять та індивідуалізацію. Це дозволяє подолати психологічні бар'єри (стрес, страх помилки) та сформувати стійкі навички самостійної роботи, мотивацію й інтелектуальну витривалість. Детальніше про психологічний стан учнів ліцею описано в пункті 1.3 розділу 1.

Визначення освітніх втрат:

Освітні втрати проявляються у вигляді зниження рівня засвоєння навчального матеріалу, пропусків у розумінні ключових понять та зменшенні мотивації до навчання (Лук'янова & Філон, 2023; Бичко & Терещенко, 2023). Для зменшення таких втрат дослідники Г. Бичко та В. Терещенко(Бичко & Терещенко, 2023) рекомендують «використовувати:

- Навчання під час канікул. Проекти або дослідження прикладного змісту, що потребують застосування функцій та їх властивостей.
- Репетиторство за державний кошт. Організація консультації з учнями для надолуження прогалин, що утворились під час вивчення функцій у 7-9 класах, та під час вивчення змістової лінії «Функції» у ліцеї.
- Перегляд та адаптація освітніх програм. Перегляд освітніх програм із метою їх адаптації до потреб учнівства або зміна навчального плану, для закріплення знань про функції та їх властивості.
- Розроблення додаткового контенту з ключових навчальних тем. Розроблення додаткового якісного освітнього контенту: відео, лекцій, конспектів про функції, які допоможуть учням закріпити знання із теми.
- Методична підготовка вчителів до роботи з учнями, які мають навчальні втрати. Забезпечення курсів для вчителів із питань ефективних технологій подолання навчальних втрат, зокрема, методичних курсів що стосуються функцій» (Бичко & Терещенко, 2023).

Такий підхід дозволяє досягти одразу декількох цілей: зменшити освітні втрати, розвивати навички самонавчання, співпраці, дисципліни,

комунікації. Але вчителю рекомендуємо проводити регулярний моніторинг успішності. Після такого моніторингу (аналізуючи виконані учнями завдання, темп виконання) можна своєчасно скоригувати навчальний процес і дати учням індивідуальну підтримку.

Зміст

Відповідно до модельної програми (Нелін та ін., 2026) визначено такі теми: «множини, функції, рівняння і нерівності; степенева функція; тригонометричні функції; похідна та її застосування; показникова та логарифмічна функції» (Нелін та ін., 2026).

Поняття функціональної лінії: «функціональні залежності, числові функції, способи задання функцій; область визначення і множина значень функції; графік функції; парність і непарність функцій, найбільше та найменше значення функції; властивості графіків парних і непарних функцій; побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій; оборотні функції; взаємно обернені функції; графік оберненої функції; рівняння і нерівності та їх системи; функціональний погляд на рівняння і нерівності; графіки рівнянь і нерівностей із двома змінними; функції, рівняння і нерівності як математичні моделі об'єктів та процесів навколишнього світу; послідовності як функції натурального аргументу; корінь n -го степеня; арифметичний корінь n -го степеня, його властивості; функція $y = \sqrt[n]{x}$ та її графік; найпростіші ірраціональні рівняння і нерівності; степінь із раціональним показником, його властивості; степеневі функції, їхні властивості та графіки; радіанна міра кута; синус, косинус, тангенс кута; тригонометричні функції числового аргументу; основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу; формули зведення; періодичність функцій; властивості та графіки тригонометричних функцій; формули тригонометричних функцій від суми і різниці двох аргументів та наслідки з них; найпростіші тригонометричні рівняння; похідна функції, її

геометричний і фізичний зміст; правила диференціювання; складена функція; похідна складеної функції; ознака сталості функції; достатні умови зростання і спадання функції; екстремуми функції; застосування похідної до дослідження функцій та побудови їхніх графіків; найбільше і найменше значення функції на проміжку; властивості та графік показникової функції; логарифми та їхні властивості; властивості та графік логарифмічної функції; найпростіші показникові та логарифмічні рівняння і нерівності; похідні показникової та логарифмічної функцій (Нелін та ін., 2026)».

Організаційно –діяльнісний етап

Методи навчання: використаємо найбільш традиційну, універсальну класифікацію – за джерелом передачі інформації.

1. Словесні. Наприклад, використовуючи перевернуте навчання вчитель може дати учням завдання переглянути відео (iLearn, 2021) перед початком вивчення функцій у 10 класі, а під час уроку провести обговорення повтореного матеріалу.

2. Наочні. Наприклад, для актуалізації опорних знань та мотивації до вивчення тригонометричних функцій, влаштовуємо брейншторм на тему «Тригонометричні функції в реальному житті» за допомогою додатку Mentimeter (рис. 2. 2), який допоможе показати важливість вивчення тригонометричних функцій та різноманітність сфер їх застосування.

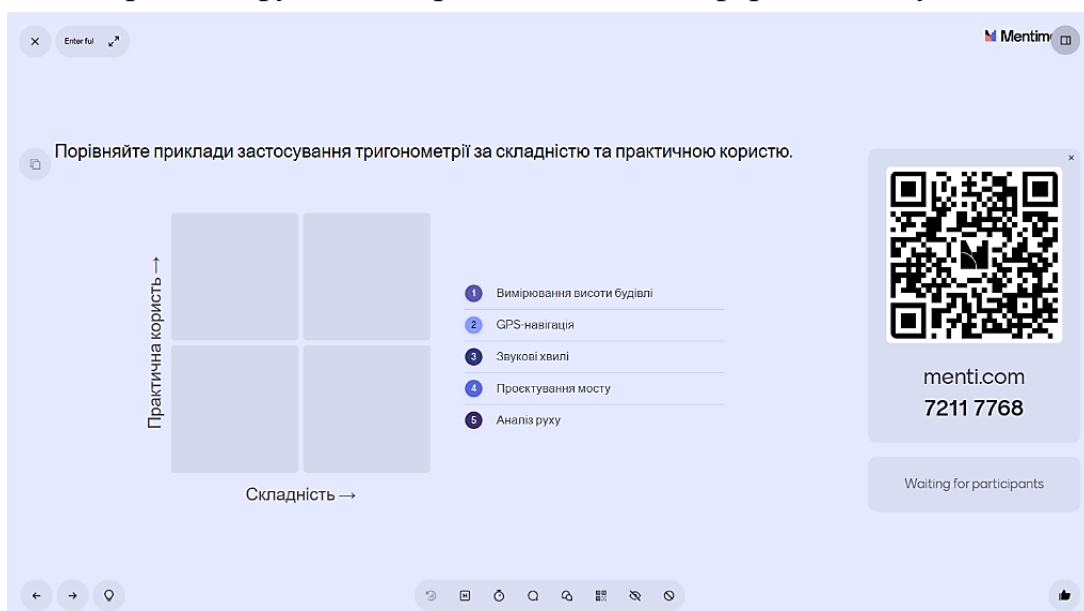


Рисунок 2. 2. Брейншторм «Тригонометричні функції в реальному житті»

3. Практичні. Використання прикладних задач, які розв'язуються за допомогою функції та їх властивостей (детальніше буде описано в пункті 2.3 розділу 2).

Форми навчання:

Основні форми навчання визначено законом України про освіту (ВРУ, 2017). Сучасна система навчання є гнучкою та багаторівневою, де поєднання та можливість обрати форму дозволяє персоніфікувати темп навчання.

Інструменти:

Процес навчання може допускати використання різноманітних сучасних засобів навчання (системи комп'ютерної математики, системи динамічної математики, засоби символної математики, засоби чисельної математики, засоби математичного моделювання, онлайн-сервіси математичного призначення тощо), де вибір конкретних інструментів залишається на розсуд вчителя залежно від дидактичної мети уроку, специфіки матеріалу та навчальних потреб учнів. Для ефективного викладання змістової лінії «Функції» радимо системи динамічної математики (GeoGebra, Desmos тощо), системи комп'ютерної математики (Mathematica, Maple, Wolfram Alpha тощо) освітні платформи для організації процесу та хаби знань (Google Classroom, Google Sites тощо), а також засоби опитування та гейміфікації для діагностики і контролю (Kahoot, Classtime тощо). Водночас активно залучаються візуалізаційні та відеоресурси (YouTube, Canva тощо), сервіси для колективної роботи й комунікації (Padlet, Google Docs тощо), засоби математичного моделювання (Python, симуляції PhET тощо), а також технології штучного інтелекту (ChatGPT, Gemini) для генерації контекстних завдань, диференціації та автоматизації підготовки до занять. Наприклад, для актуалізації опорних знань про степеневу функцію можемо використати сервіс AhaSlides (рис. 2.

3), де учні можуть записати асоціації із поняттям степеневі функції, на екрані буде виведена хмара слів із відповідями, що дозволить одразу проаналізувати та виокремити ознаки степеневі функції.

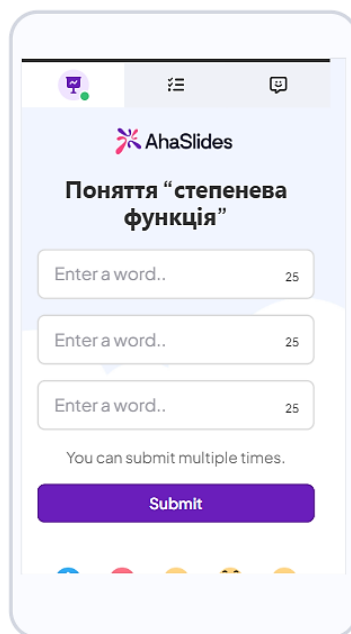


Рисунок 2. 3. Екран учня в сервісі AhaSlides

Побудова індивідуальної траєкторії навчання та створення цілісної навчальної системи шляхом використання сучасних засобів навчання:

Це комплексна та гнучка система, що базується на моделі змішаного навчання. Вона дозволяє адаптувати темп, зміст та інструменти під потреби кожного учня, що особливо важливо для подолання освітніх втрат під час вивчення функцій та підвищення мотивації до їх вивчення.

1. Попередня діагностика та моніторинг

Процес починається не з викладу матеріалу, а з визначення рівня підготовки та «вузьких місць» кожного учня. Наприклад, під час вивчення показникової функції, проводимо опитування «Степені. Властивості степенів» (Года, 2024), для того щоб повторити властивості степенів та виявити прогалини у знаннях учнів.

2. Організація цифрового середовища («Дорожня карта»)

Для того, щоб учень не відчував дезорієнтації, створюється єдиний цифровий простір, наприклад у Google Classroom або Google Sites, де

структуровано весь контент: відео, теорію та завдання. Учням надається чітка картка-інфографіка вивчення певної функції, що пояснює маршрут навчання за схемою «до – під час – після уроку» або розв’язання задач (рис. 2. 4).



Рисунок 2. 4. Картка-інфографіка для розв’язання прикладних задач, що розв’язуються за допомогою показникової функції

3. Диференціація завдань за рівнями складності

Індивідуалізація досягається через поділ завдань на три рівні: рівень А – базовий (вправи з підручника, знаходження області визначення, робота з базовими поняттями, наприклад визначити область визначення логарифмічної функції $y = \log_3(x - 5)$ або $y = \log_2(6 - 2x)$); рівень В – дослідницький (побудова графіків у GeoGebra або Desmos, дослідження впливу параметрів на вигляд функції, наприклад у Desmos побудувати графік $y = \log_2(x - a) + b$, з’ясувати, як параметри a і b впливають на зсув вертикальної асимптоти та розміщення графіка у координатній площині); рівень С – прикладний (розв’язування складних рівнянь та прикладних кейсів, наприклад, стартап «DriveEat» (додаток Р)).

4. Гнучкий формат: поєднання асинхронної та синхронної роботи

Траєкторія дозволяє кожному учневі працювати у власному темпі: асинхронно (самостійне опрацювання мультимедіа у зручний час, наприклад перегляд відео про властивості функцій (iLearn, 2021)); синхронно (під час консультацій вчитель надає адресну підтримку, допомагає розібрати конкретні помилки та консультує учнів, наприклад допомагає зрозуміти суть поняття показникова функцій).

5. Підтримка та менторство

Для запобігання соціальній ізоляції та підтримки психологічного стану впроваджується проєктна робота або практичний кейс, наприклад стартап «DriveEat» (додаток Р), учні працюють в групах, проводять аналіз дослідження та рефлексію після виконання завдання.

6. Постійний зворотний зв'язок та рефлексія

Моніторинг успішності здійснюється регулярно, а не лише в кінці теми: гейміфікація (використання рейтингів та бейджів (рис. 2. 5) для підтримки мотивації); взаємооцінювання (спільні проєкти на застосування функцій до розв'язування прикладних задач із використання взаємооцінювання після виконання завдань); самоперевірка (використання Wolfram Alpha або Photomath для автономної перевірки побудови графіків функцій).



Рисунок 2. 5. Бейдж «Майстер читання графіків»

Очікуваним результатом такої траєкторії є не лише засвоєння властивостей функцій, а й розвиток цифрової грамотності, самодисципліни, критичного мислення та здатності застосовувати математичні моделі в

реальному житті. При цьому вчитель залишається головним ментором, який спрямовує процес.

Оцінювально – результативний етап

Критерії та індикатори оцінювання:

Охоплюють предметні знання властивостей і побудови графіків функцій, здатність до математичного моделювання реальних процесів, рівень сформованості компетентностей. Індикаторами досягнення слугують якість створених навчальних продуктів, успішність у гейміфікованих тестах та динаміка проходження індивідуальної освітньої траєкторії, рефлексія (рис. 2. 6).

Питання	Так	Частково	Ні
Я розумію, як обчислювати логарифми з різними основами.			
Я можу пояснити, що означає логарифм як показник степеня.			
Я можу побудувати графік логарифмічної функції.			
Я розумію, як логарифми застосовуються в реальному житті.			
Я впевнений(а), що зможу пояснити цю тему однокласнику.			

Рисунок 2. 6. Рефлексія «Логарифмічна функція»

Далі ми продемонструємо реалізацію концептуальної моделі використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею для кожного з наведених класів функцій.

2.3. Методичні особливості вивчення окремих класів функцій відповідно до реалізації концептуальної моделі

Як було показано в пункті 2.2, спільними елементами вивчення функцій у ліцеї, відповідно до концептуальної моделі, є використання змішаного навчання, сучасних засобів навчання, акцент на прикладних та компетентнісних задачах, побудова індивідуальних траєкторій навчання для подолання освітніх втрат. Основними спільними компонентами запропонованої нами методики є: організаційні форми та моделі навчання; спільний інструментарій (засоби навчання); методичні прийоми та підходи; оцінювання та рефлексія; побудова індивідуальної траєкторії. Цей цілісний підхід дозволяє учням не просто запам'ятовувати формули, а розвивати навички самостійності, цифрової грамотності та критичного мислення незалежно від конкретної математичної теми.

Проте окрім спільних рис вивчення степеневих, тригонометричних, показникової та логарифмічної функцій різниться специфікою їх застосування до розв'язування прикладних задач. Відповідно до вимог Державного стандарту (Державний стандарт профільної середньої освіти, 2024) щодо формування математичної компетентності, такі прикладні та компетентнісні задачі доцільно впроваджувати на етапі мотивації навчальної діяльності (для створення проблемних ситуацій та стимулювання інтересу, як зазначає О. Пометун (Пометун, 2007)) або на етапі закріплення знань (для відпрацювання практичних навичок за методикою Н. Тарасенкової (Тарасенкова, 2016)).

На етапі мотивації основним завданням є створення стійкої пізнавальної мотивації до навчання та демонстрація практичної значущості змістової лінії «Функції». У залежності від загального рівня знань учнів у класі ми радимо розв'язувати мотиваційні задачі самостійно вчителем, якщо учні мають переважно низький або середній рівень знань; для класів із достатнім рівнем знань – вчитель також самостійно розв'язує задачу але

використовує метод евристичної бесіди; у класі з високим рівнем знань – використовуємо проблемний або дослідницький метод.

На етапі закріплення знань акцент навчальної діяльності учнів зміщується на самостійну дослідницьку діяльність учнів із використанням сучасних засобів навчання (динамічних математичних середовищ на кшталт *GeoGebra* чи *Desmos*, цифрових сервісів *Wordwall*, *ClassTime* тощо). Під час розв’язування задач на цьому етапі в учнів уже сформоване уявлення про конкретну функцію, яку вони вивчали, знають основні властивості цієї функції та вміють застосовувати їх під час розв’язування типових задач. Використовуючи прикладні задачі на етапі закріплення знань учні одержують можливість самостійно змінювати параметри досліджуваних об’єктів, висувати та перевіряти гіпотези, аналізувати перетворення графіків функцій в реальному часі й робити самостійні висновки щодо поставлених запитань у задачах.

Наведемо приклади задач, розв’язання та методичні коментарі для степеневі, тригонометричних, показникової та логарифмічної функцій, які доцільно буде використовувати на етапі мотивації навчальної діяльності та етапі закріплення знань із використанням сучасних засобів навчання. Наведені задачі орієнтовані для вивчення на рівні стандарту. Методика вивчення змістової лінії «Функції» на поглибленому рівні дещо відрізняється, але загальні підходи до вивчення функцій (Швець, 2024) не змінюються, а також відбувається розширення вивчення даної змістової лінії шляхом опанування обернених тригонометричних функцій.

Степенева функція

Етап мотивації

Задача. Потужність сигналу Wi-Fi залежить від відстані до роутера й описується степеневою функцією $I(d) = k \cdot d^{-2}$ де I — інтенсивність (Вт/м^2), d – відстань у м, k – потужність джерела у Вт. Обчисліть, як

зміниться інтенсивність сигналу для користувача, якщо він відійде від роутера: а) у 2 рази далі; б) у 3 рази далі.

Розв'язання.

d_1 – початкова відстань; d_2 – нова відстань; $I_1(d_1) = k \cdot d_1^{-2}$; $I_2(d_2) = k \cdot d_2^{-2}$

$$\text{а) } d_2 = 2 \cdot d_1; I_2(d_2) = k \cdot d_2^{-2} = \frac{k}{d_2^2} = \frac{k}{(2 \cdot d_1)^2} = \frac{k}{4 \cdot d_1^2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{k}{d_1^2} \right) = \frac{1}{4} \cdot I_1$$

$$\text{б) } d_2 = 3 \cdot d_1; I_2(d_2) = k \cdot d_2^{-2} = \frac{k}{d_2^2} = \frac{k}{(3 \cdot d_1)^2} = \frac{k}{9 \cdot d_1^2} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{k}{d_1^2} \right) = \frac{1}{9} \cdot I_1$$

Методичний коментар:

1. Актуальність теми. Запропонована задача безпосередньо відповідає сучасним запитам математичної освіти в Україні та концепції НУШ. Замість абстрактних моделей учням пропонується реальний кейс із їхнього щоденного життя (якість бездротового інтернету залежно від розташування в помешканні). Актуальність полягає у розв'язанні проблеми відірваності шкільної теорії від практики: задача наочно демонструє, як суто математичні властивості степеня з від'ємним показником керують сучасними технологіями, з якими підлітки взаємодіють щохвилини.

2. Достатній теоретичний рівень. Задача базується на фундаментальному законі класичної фізики та хвильової інженерії – «Законі обернених квадратів». У зміст інтегровано об'єктивні наукові факти (тривимірне сферичне поширення електромагнітних хвиль у просторі) та технічні реалії роботи побутової електроніки. Математичний апарат задачі вимагає від учнів застосування властивостей степеневих функцій з від'ємним парним показником, зокрема тотожності $f(x) = k \cdot x^{-2} = \frac{k}{x^2}$, що забезпечує глибоке засвоєння теми «Степенева функція» в 10 класі.

3. Дослідницький характер. Завдання вимагає від учнів елементів дослідження. Замість прямого обчислення за готовим шаблоном, учні мають проаналізувати побутову гіпотезу («якщо відстань більша втричі, то сигнал слабший втричі») та спростувати її за допомогою математичного

моделювання. Процес розв'язання передбачає роботу з функціональною залежністю.

4. Зміст та практичне застосування. Зміст задачі логічно пов'язує фізичні й технічні величини (інтенсивність хвилі, відстань до джерела) із математичним поняттям аргументу та функції.

- Прогноз результату: завдяки сильному когнітивному дисонансу (учні підсвідомо очікували погіршення сигналу лише в 3 рази, а математично отримали – в 9 разів), задача гарантує довготривале запам'ятовування властивостей функції $y = x^{-2}$ та форми її графіка.

- Практичне застосування: матеріал рекомендується використовувати на етапі мотивації (для створення проблемної ситуації під час введення функцій з від'ємними показниками).

5. Відповідність навчальним програмам. Задача повністю відповідає чинній навчальній програмі з математики (рівень стандарту та профільний рівень) для 10 класу, розділ «Степенева функція». Зміст завдання органічно базується на раніше засвоєних учнями знаннях:

- Властивості степеня з цілим від'ємним показником.
- Поняття функції, аргументу, залежної змінної та коефіцієнта пропорційності.

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі сформульовано літературною українською мовою з дотриманням сучасних лінгвістичних норм педагогічного стилю. Використано стандартизовану наукову термінологію та міжнародну систему одиниць (СІ) для позначення відстаней (м) та інтенсивності випромінювання (Вт/м^2). Математичні вирази, формули та варіанти відповідей оформлені за допомогою чіткого символічного запису, що полегшує візуальне сприйняття матеріалу.

7. Компетентності, які розвиває ця задача. Робота над задачею забезпечує формування компетентностей учнів відповідно до Державного стандарту профільної середньої освіти:

- Математична компетентність: формує вміння розробляти, аналізувати та інтерпретувати математичні моделі реальних процесів; оперувати степеневими виразами для швидких усних розрахунків; досліджувати поведінку функції при зміні аргументу.
- Інформаційно-цифрова компетентність: допомагає учням зрозуміти фізико-математичні принципи роботи бездротових мереж (Wi-Fi, мобільний зв'язок), що сприяє усвідомленому та грамотному налаштуванню домашнього цифрового середовища (наприклад, правильному вибору місця для роутера в квартирі).
- Компетентність у галузі природничих наук, техніки і технологій: реалізує глибокий міжпредметний зв'язок із фізикою (тема «Електромагнітні хвилі», геометричне поширення енергії у вигляді сфери) та знайомить із поняттям константи джерела випромінювання.
- Уміння навчатися впродовж життя: розвиває критичне мислення, логіку, здатність аналізувати побутові життєві ситуації за допомогою точних наукових інструментів та піддавати сумніву хибні інтуїтивні висновки.

Етап закріплення знань.

Задача. Статистичний аналіз монетизації показав, що місячний дохід блогерки Оксани від прямих рекламних інтеграцій $D(n)$ (у доларах на місяць) після подолання порогу в 10 тисяч підписників можна змодельовати за допомогою функції: $D(n) = 100 + 0,0001 \cdot (n - 10)^5$, де n – загальна кількість підписників каналу у тисячах ($n > 10$), а 100 – базовий гарантований дохід від переглядів. Скільки тисяч підписників потрібно набрати блогерці, щоб її чистий прибуток від рекламних контрактів становив рівно 3125 дол. на місяць?

Примітка: Задачу можна унаочнити за допомогою <https://www.desmos.com/calculator/nlxlekohze>

Розв'язання: $100 + 0,0001 \cdot (n - 10)^5 = 3125$; $0,0001 \cdot (n - 10)^5 = 3125 - 100$; $(n - 10)^5 = 3025 \div 0,0001$; $(n - 10)^5 = 30\,250\,000$; $n - 10 = \sqrt[5]{30250000}$; $n - 10 \approx 19,78$;
 $n \approx 19,78 + 10 = 29,78$

Методичний коментар:

1. Актуальність теми. Запропонована задача безпосередньо відповідає сучасним запитам профільної математичної освіти в Україні та концепції НУШ. Замість абстрактних моделей учням пропонується реальний кейс із повсякденного та зрозумілого їм інфопростору (аналітика доходів інфлюенсера, розвиток блогу та монетизація контенту). Актуальність полягає у розв'язанні проблеми відірваності шкільної теорії від практики: задача наочно демонструє, як суто математичний апарат степеневих функцій дозволяє прогнозувати фінансові результати в сучасній цифровій економіці (Creator Economy) та формує фінансову грамотність підлітків.
2. Достатній теоретичний рівень. Задача базується на реальних закономірностях інфлюенс-маркетингу, де після подолання певного порогу підписників (перехід у категорію мікро- чи макроблогерів) вартість рекламних контрактів та охоплення алгоритмів рекомендацій зростають нелінійно. Математичний апарат задачі вимагає від учнів знаходження значень аргументу за заданим значенням функції, розуміння структури багаточлена, виконання рівносильних перетворень та добування кореня непарного (5-го) степеня із великих чисел. Це забезпечує глибоке засвоєння теми «Степенева функція» та її властивостей у 10 класі.
3. Дослідницький характер. Завдання вимагає від учнів елементів дослідження та критичного аналізу даних. Наявність умовного обмеження ($n > 10$) та робота з дробовими коефіцієнтами змушують учнів ретельно аналізувати область визначення функції та реалістичність математичної моделі. Додаткова примітка із посиланням на динамічний графічний калькулятор Desmos спонукає здобувачів освіти до верифікації отриманих

аналітичних результатів графічним методом, порівнюючи наближене обчислення на папері з точкою перетину графіків на екрані.

4. Зміст та практичне застосування. Зміст задачі логічно пов'язує економічні й маркетингові показники (чистий прибуток, базовий дохід, кількість підписників) із математичними поняттями аргументу, функції та її коефіцієнтів.

- Прогноз результату: завдяки використанню функції високого (5-го) степеня учні фіксують лавиноподібне, вибухове зростання прибутку при відносно невеликій зміні аргументу, що гарантує довготривале запам'ятовування властивостей та крутизни графіків степеневих функцій із показником $n > 3$.

- Практичне застосування: матеріал рекомендується використовувати на етапі закріплення знань, практичного застосування властивостей функцій, або як інтегроване домашнє завдання з використанням цифрових інструментів.

5. Відповідність навчальним програмам. Задача повністю відповідає чинній навчальній програмі з математики (рівень стандарту та профільний рівень) для 10 класу, розділ «Степенева функція». Зміст завдання органічно базується на раніше засвоєних учнями знаннях:

- Означення та властивості степеневі функції з натуральним показником.

- Поняття кореня n -го степеня та алгоритми його наближеного обчислення.

- Навички побудови та читання графіків функцій за допомогою спеціалізованого програмного забезпечення.

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі сформульовано літературною українською мовою з дотриманням сучасних лінгвістичних норм педагогічного стилю. Використано чітке розділення понять загального доходу ($D(n)$) та чистого прибутку, що є важливим з погляду фінансової

термінології. Математичні вирази, покроковий запис розв’язання рівняння, знак наближеного дорівнює та символічний запис кореня 5-го степеня оформлені бездоганно, що полегшує візуальне сприйняття та логічне наслідування алгоритму учнями.

7. Компетентності, які розвиває ця задача. Робота над задачею забезпечує формування компетентностей учнів відповідно до Державного стандарту профільної середньої освіти:

- Математична компетентність: формує вміння будувати, досліджувати та інтерпретувати складні математичні моделі; оперувати степеневими функціями високих порядків; зіставляти аналітичний розв’язок рівняння з його геометричною інтерпретацією.

- Інформаційно-цифрова компетентність: передбачає активне використання інструментів динамічної математики (графічного калькулятора Desmos за вказаним унікальним посиланням) для візуалізації складних функціональних залежностей та перевірки математичних гіпотез.

- Підприємливість та фінансова грамотність: знайомить учнів із сучасними бізнес-моделями інтернет-маркетингу та медіасфери, вчить розмежовувати поняття доходу (виручки) та чистого прибутку, оцінювати динаміку фінансового зростання стартапів чи персональних брендів.

- Уміння навчатися впродовж життя: розвиває критичне та аналітичне мислення, вчить здобувачів освіти працювати з прикладними припущеннями та наближеними обчисленнями, які є невіддільною частиною реальних інженерних, статистичних та економічних розрахунків.

Тригонометричні функції

Етап мотивації.

Задача. Уявіть, що ви – розробники комп’ютерних ігор (наприклад, симулятора парку розваг) або інженери з безпеки. У вашому парку запускають нове гігантське колесо огляду. Кабінка з пасажирами починає

рух з найнижчої точки (платформи), яка піднята над землею на 2м. Найвища точка, якої досягають відвідувачі на вершині колеса, становить 50 м. Повне коло колесо здійснює рівно за 4 хвилини. Через 1 хвилину після старту на атракціоні раптово вимкнулося світло й колесо зупинилося. Потрібно терміново викликати рятувальників із висувною драбиною. На яку саме висоту в метрах має висуватися драбина? Як це швидко прорахувати, якщо ми знаємо лише час зупинки – 1 хвилинка? Чи можна описати рух кабінки вгору і вниз однією універсальною математичною формулою, щоб оператор атракціону завжди бачив точну висоту пасажирів на своєму моніторі в реальному часі?

Розв'язання

Для розв'язання задачі будуємо модель (рис. 2. 7) у GeoGebra (інструкція побудови в додатку С)

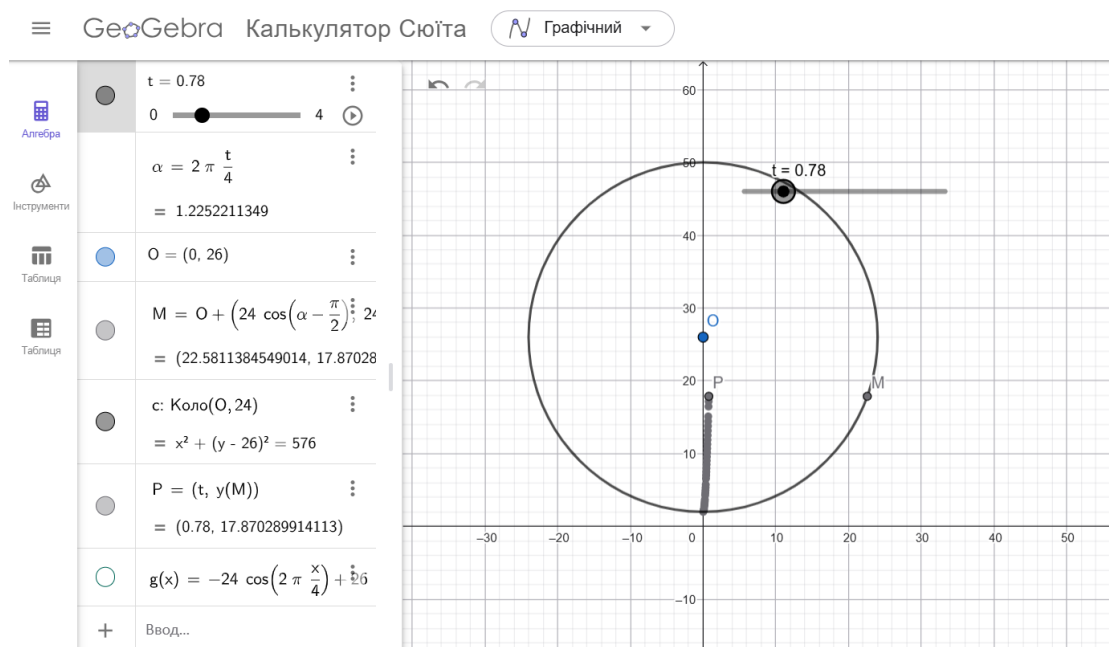


Рисунок 2. 7. Модель руху колеса огляду

Після моделювання задачі учні мають отримати відповідь 26 м.

Примітка: Для правильного позиціонування об'єкта в системі координат учні мають врахувати радіус (R) та центр колеса (M): найнижча точка – 2 м, найвища – 50 м, отже діаметр становить $50 - 2 = 48$ м. Радіус колеса: $R = 24$ м. Центр колеса M по осі Oy піднятий на висоту: $2 + 24 = 26$ м.

Вводиться точка центра: $M = (0, 26)$. Будується коло за центром і радіусом: $c = \text{Circle}(M, 24)$. Оскільки рух починається з найнижчої точки (2 м) і йде вгору, позицію кабінки (точки P) залежно від часу t найзручніше задати через параметричне рівняння або функцію косинуса, зміщену по фазі. Період коливань становить 4 хвилини, тому кутова швидкість $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Для формування зв'язку між рухом по колу та графіком синуса, у GeoGebra будується універсальна функція висоти $h(t)$, будується залежна динамічна точка графіка: $G = (t, y(P))$. Якщо увімкнути для точки G функцію «Залишати слід» (Trace On), то під час обертання колеса на екрані паралельно вимальовуватиметься ідеальна косинусоїда.

Методичний коментар

1. Актуальність теми. Запропонована нами задача безпосередньо відповідає сучасним потребам організації навчально-виховної роботи у старшій школі відповідно до реформи НУШ. Тематика індустрії розваг, геймдеву (GameDev / розробки комп'ютерних ігор) та екстремальних атракціонів є максимально близькою, динамічною та зрозумілою сучасному поколінню учнів. Практична значущість полягає в тому, що задача руйнує стереотип про «відірваність» тригонометрії від реального життя. Вона наочно демонструє, що проектування безпекових систем атракціонів та створення ігрових симуляцій підпорядковується чітким математичним закономірностям – періодичним тригонометричним функціям.

2. Достатній теоретичний рівень. Тему розкрито на сучасному рівні розвитку наукових знань про прикладну інженерію та комп'ютерне моделювання фізичних процесів. У змісті матеріалу використано об'єктивні факти:

- Кінематика колового руху: взаємозв'язок між лінійним переміщенням точки по колу та її проекцією на вертикальну вісь (висоту над землею).
- Конструктивні параметри як параметри функції: наявність мінімальної та максимальної висоти над землею (2 м і 50 м), що

безпосередньо визначають амплітуду косинусоїди та вертикальне зміщення її графіка.

- Математичний апарат задачі повністю коректний: учні оперують поняттями періоду циклу ($T = 4$ хв), циклічної частоти, екстремумів функції та досліджують поведінку періодичної залежності на конкретному часовому проміжку ($t = 1$ хв).

3. Дослідницький характер. Задача має яскраво виражений дослідницький характер, оскільки стає для учнів інтелектуальним викликом на етапі мотивації. Поставлене проблемне запитання про порятунок людей змушує школярів аналізувати динаміку руху. Учні стикаються з математичним парадоксом: висота кабінки залежить від часу нелінійно (за чверть часу оберту кабінка пройшла не чверть усього шляху, а піднялася до рівня центра осі колеса – 26 м). Це спонукає учнів до критичного мислення, висування гіпотез та усвідомлення того, що прості лінійні чи квадратичні функції не здатні описати циклічний процес, вимагаючи пошуку абсолютно нового математичного інструменту.

4. Зміст та практичне застосування. Матеріал викладено послідовно, лаконічно та емоційно насичено, що ідеально для перших хвилин уроку.

- Прогноз результату: очікується, що завдяки створенню проблемної ситуації (екстрена зупинка атракціону), рівень залученості учнів та їхній пізнавальний інтерес до вивчення властивостей тригонометричних функцій зросте.

- Рекомендації щодо застосування: задачу необхідно використовувати на етапі мотивації та актуалізації опорних знань під час введення теми «Тригонометричні функції як моделі періодичних процесів», або як стартовий кейс на інтегрованих уроках (Математика + Фізика / Інформатика).

5. Відповідність навчальним програмам. Зміст задачі повністю відповідає чинній навчальній програмі з алгебри та початків аналізу для 10 класу

(рівень стандарту та профільний рівень), розділ «Тригонометричні функції». Сюжет побудовано як місток від геометрії до математичного аналізу, спираючись на раніше набуті знання:

- Означення синуса і косинуса гострого кута в прямокутному трикутнику.
- Поняття декартових координат точки на одиничному колі.
- Співвідношення між часом, швидкістю та періодом повторення процесів (із курсу фізики 7–9 класів).

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі сформульовано літературною українською мовою з дотриманням наукової та технічної термінології. Структура задачі розроблена з урахуванням її миттєвої інтеграції в сучасне цифрове середовище GeoGebra або Desmos. Візуалізація «розгортання» обертового кола у хвилю синусоїди в GeoGebra забезпечує високий естетичний, технологічний та наочний рівень початку уроку.

7. Компетентності, які розвиває ця задача:

- Математична компетентність: вміння перекладати реальну життєву ситуацію мовою математичних символів; інтуїтивне розуміння періодичності, амплітуди та зміщення графіка функції до їхнього формального вивчення.
- Компетентність у галузі природничих наук, техніки і технологій (STEM-орієнтація): розуміння інженерних принципів безпеки та технічних розрахунків механізмів; моделювання фізичного руху за допомогою математичного апарату.
- Інформаційно-комунікаційна компетентність: формування наочно-образного мислення через роботу з динамічними графопобудовниками; розуміння алгоритмів, за якими розробники комп'ютерних ігор створюють траєкторії об'єктів у віртуальному просторі.

- Громадянські та соціальні компетентності: усвідомлення важливості точних інженерних розрахунків для забезпечення безпеки життя та здоров'я людей у публічних просторах.
- Уміння навчатися впродовж життя: формування стійкої внутрішньої мотивації до навчання; здатність бачити математичні закони в оточуючому середовищі (від годинників до парків розваг).

Етап закріплення знань

Задача: Уявіть, що ви працюєте інженерами в компанії з проектування сонячних електростанцій у Києві. Для оптимізації роботи панелей вам потрібно побудувати математичну модель зміни висоти сонця над горизонтом протягом року. Зайдіть на сайт SunCalc, оберіть місто Київ та 22-ге число кожного місяця 2026 року. Знайдіть час астрономічного полудня (Culmination) та випишіть значення висоти сонця (Altitude) у таблицю 2.3.

Таблиця 2.3

Висота сонця

Січ	Лют	Бер	Квіт	Трав	Черв	Лип	Сер	Вер	Жов	Лис	Груд

а) Перенесіть ці дані як точки у систему координат. Виберіть початок відліку системи координат так, щоб значення $t = 0$ відповідало березню (місяцю весняного рівнодення). Визначте функцію моделювання f вигляду: $f(t) = a \sin(bt) + d$ та оцініть, наскільки точно отриманий графік описує реальні точки.

б) Змініть початок відліку системи координат так, щоб значення $t = 0$ відповідало червню (місяцю літнього сонцестояння). Визначте функцію моделювання g вигляду: $g(t) = p \cdot \cos(q \cdot t) + r$.

Розв'язання

Орієнтовні значення для таблиці 2.4 (містять похибку).

Таблиця 2.4

Орієнтовні значення висоти сонця

Січ	Лют	Бер	Квіт	Трав	Черв	Лип	Сер	Вер	Жов	Лис	Груд
19,5°	29,5°	39,5°	51,5°	59,5°	63°	59,5°	51,5°	39,5	28,5°	19,5°	16°

$$a) t = 0, d = 39,5; a = h_{max} - d = 63 - 39,5 = 23,5; T = 12; b = \frac{2\pi}{T} =$$

$$\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}; f(t) = 23,5 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 39,5$$

$$б) r = 39,5; g(0) = p \cdot 1 + 39,5 = 63 \Rightarrow p = 23,5; q = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}; g(t) = 23,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) + 39,5$$

Методичний коментар

1. Актуальність теми. Запропонована задача безпосередньо відповідає сучасним потребам організації навчально-виховної роботи у старшій школі в межах концепції НУШ. Тематика відновлюваної енергетики є життєвою, екологічно орієнтованою та зрозумілою сучасному поколінню учнів. Практична значущість полягає в тому, що задача руйнує стереотип про «відірваність» тригонометрії від реального світу. Вона наочно демонструє, що природні явища та кліматичні цикли підпорядковуються чітким математичним закономірностям, зокрема періодичним гармонічним функціям (синусу та косинусу).

2. Достатній теоретичний рівень. Тему розкрито на сучасному рівні розвитку наукових знань про астрофізику, прикладну геодезію та сонячну генерацію. У змісті матеріалу використано об'єктивні факти:

- Астрономічна циклічність: залежність висоти Сонця в полудень від нахилу земної осі до площини екліптики та географічної широти міста Києва.

- Різниця між ідеальною моделлю та реальністю: використання вебресурсу SunCalc дозволяє учням побачити поняття астрономічного полудня (Culmination) та реальні координатні аномалії, зумовлені

еліптичністю орбіти Землі.

- Математичний апарат задачі повністю коректний: учні оперують поняттями амплітуди коливань, періодичності функції, циклічної частоти, фазового зсуву (перенесення початку відліку) та вертикального зміщення графіка.

3. Дослідницький характер. Задача має яскраво виражений дослідницький та пошуковий характер. Замість пасивного сприйняття готових чисел у таблиці, учні самостійно здійснюють «цифрову експедицію» на сайт SunCalc, збираючи первинні дані для дослідження (висоту Altitude для 22-го числа кожного місяця). У пунктах а) та б) учні стикаються з математичним та географічним інтелектуальним викликом: чому при зміні початку відліку з березня на червень модель синуса перетворюється на модель косинуса з абсолютно тотожними коефіцієнтами. Це вимагає від учнів не просто механічного підрахунку, а глибокого аналізу фазових зсувів та розуміння формул зведення у тригонометрії.

4. Зміст та практичне застосування. Матеріал викладено послідовно й логічно – від збору реальних емпіричних даних до створення абстрактної математичної формули.

- Прогноз результату: очікується, що завдяки роботі з цифровою картою сонячних шляхів та візуальними трекерами, швидкість засвоєння властивостей тригонометричних функцій та побудови їхніх графіків зросте.

- Рекомендації щодо застосування: задачу доцільно використовувати як довготривалий STEM-проект, на етапі закріплення знань, або під час інтегрованих уроків (Математика + Географія / Астрономія / Фізика / Екологія).

5. Відповідність навчальним програмам. Зміст задачі повністю відповідає чинній навчальній програмі з алгебри та початків аналізу для 10 класу (як для рівня стандарту, так і для профільного рівня), розділ «Тригонометричні функції». Нові знання про гармонічні коливання та параметри

тригонометричних моделей базуються на раніше набутих знаннях та вміннях учнів:

- Означення тригонометричних функцій числового аргументу.
- Періодичність, парність/непарність, екстремуми та проміжки монотонності синуса і косинуса.
- Геометричні перетворення графіків функцій (розтягнення/стиснення вздовж осей, паралельне перенесення).

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі сформульовано лаконічною, науково-популярною українською мовою з використанням сучасної міжнародної термінології інтерфейсів (Culmination, Altitude). Математичні символи, змінні та структури таблиць оформлено чітко. Задача ідеально інтегрується в сучасні цифрові середовища навчання (Desmos, GeoGebra), що дозволяє учням одразу накладати отримані функції $f(t)$ та $g(t)$ на масив точок, візуалізуючи результати на екранах гаджетів.

7. Компетентності, які розвиває ця задача

- Математична компетентність: вміння створювати тригонометричні моделі реальних природних процесів, інтерпретувати значення математичних параметрів (a, b, d, p, q, r) як фізичних величин (амплітуда, частота, рівнодення).
- Екологічна компетентність і сталий розвиток: розуміння принципів роботи альтернативної енергетики; усвідомлення важливості точних розрахунків для підвищення енергоефективності сонячних станцій в Україні.
- Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ): формування навичок роботи з вебгеосервісами (SunCalc), цифровими базами даних, електронними таблицями та динамічними математичними середовищами (калькуляторами графіків).
- Компетентність у галузі природничих наук, техніки і технологій (STEM-орієнтація): встановлення міцних міжпредметних зв'язків між

кутовою висотою світила (астрономія), широтою місцевості (географія) та гармонічними коливаннями (математика/фізика).

- Уміння навчатися впродовж життя: розвиток критичного мислення, здатності здійснювати самоперевірку отриманих теоретичних результатів за допомогою незалежних цифрових інструментів.

Показникова функція

Етап мотивації

Задача. Анна має 100 000 грн і хоче розмістити їх на депозит під n % річних строком на один рік. Використайте депозитний калькулятор будь-якого банку та дослідіть, як змінюється кінцева сума вкладу залежно від способу нарахування відсотків. Порівняйте результати для таких умов: без капіталізації відсотків та зі щомісячною капіталізацією відсотків. Який депозит є вигіднішим? Чому за однакової річної ставки кінцева сума буде різною?

Розв'язання

Відкриваємо депозитний калькулятор, обираємо потрібні нам дані для розрахунку двох різних стратегій. Відсотки по депозиту в різних банках можуть відрізнятись.

Наприклад, у ПриватБанку на 1 рік відсоткова ставка 13%. Депозит «Стандарт строковий» пропонує 2 варіанти:

1. На карту (проценти можна витратити одразу): кінцева сума - 112 999.99 грн (рис. 2. 8).
2. До вкладу (збільшується доходність за вкладом): кінцева сума - 113 613.32 грн (рис. 2. 9).

Чому за однакової річної ставки кінцева сума буде різною? На карту: $100\,000 + 100\,000 \cdot 0,13 = 113\,000$. До вкладу: $100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,13}{12}\right)^{12} = 113\,803,25$. За однакової відсоткової ставки депозит із капіталізацією завжди принесе більше грошей, тому що база нарахування постійно зростає.

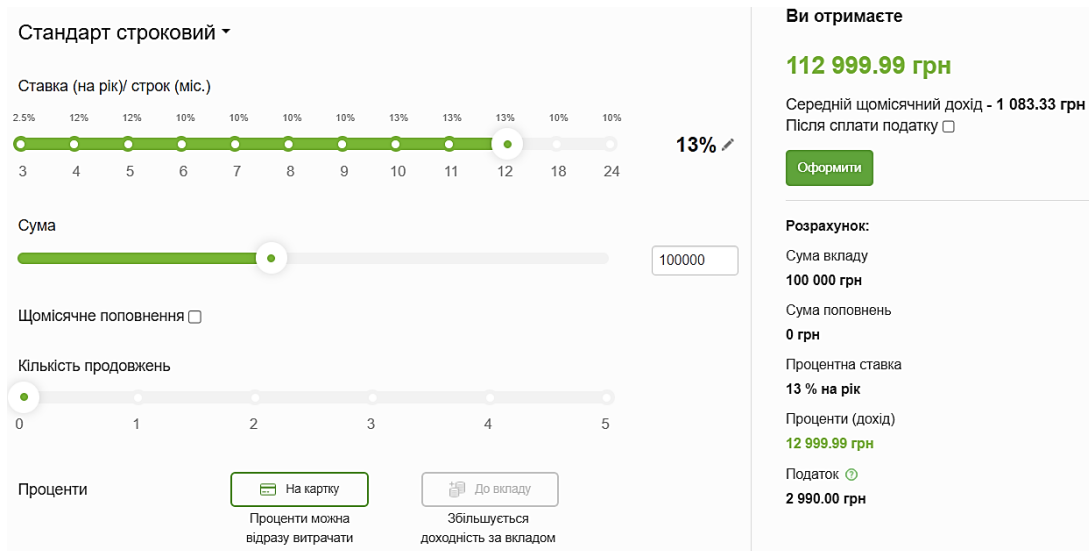


Рисунок 2. 8. Розрахунок депозиту (проценти можна відразу витратити)

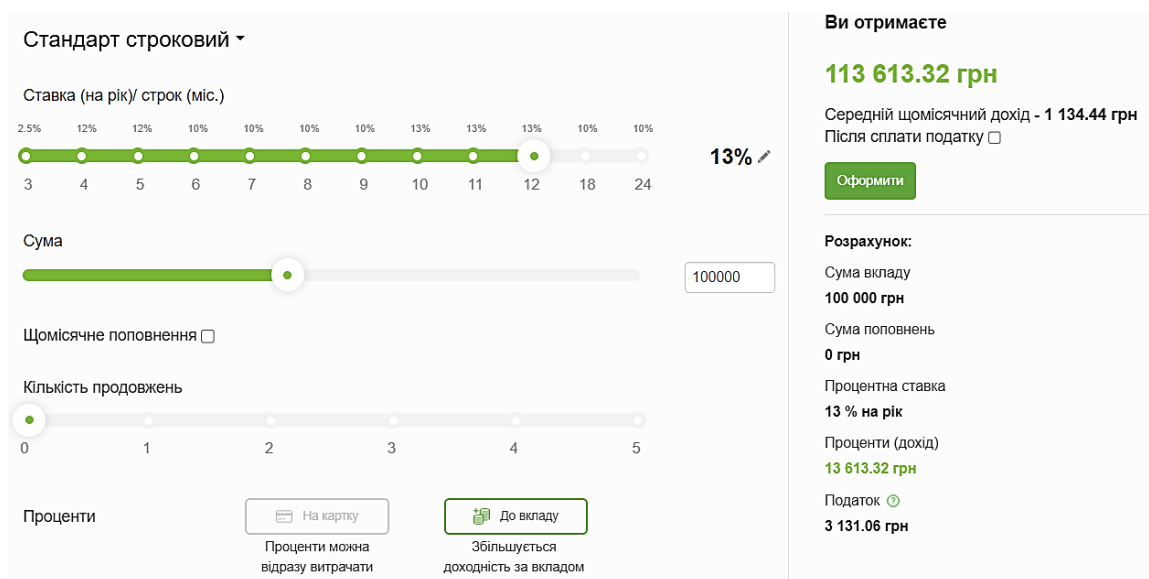


Рисунок 2. 9 . Розрахунок депозиту (збільшується дохідність за вкладом)

Чому за однакової річної ставки кінцева сума буде різною? На картку: $100\,000 + 100\,000 \cdot 0,13 = 113\,000$. До вкладу: $100\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,13}{12}\right)^{12} = 113\,803,25$. За однакової відсоткової ставки депозит із капіталізацією завжди принесе більше грошей, тому що база нарахування постійно зростає.

Примітка. Рекомендуємо вказати учням на відмінності розрахунків між депозитним калькулятором та за формулами. Відмінність трапляється через дискретність часу та податок на прибуток.

Методичний коментар

1. Актуальність теми. Запропонована задача безпосередньо відповідає сучасним запитам профільної математичної освіти в Україні та концепції НУШ. Замість абстрактних теоретичних розрахунків учням пропонується реальний кейс із повсякденного фінансового життя (вибір вигідного банківського вкладу та оптимізація власних заощаджень). Актуальність полягає у розв'язанні проблеми відірваності шкільної теорії від практики: задача наочно демонструє, як суто математичні властивості показникової функції безпосередньо впливають на добробут родини, розвивають фінансову культуру та критичне мислення майбутніх вкладників.
2. Достатній теоретичний рівень. Задача базується на економічних поняттях – простих та складних відсотках (капіталізації), які мають відображення в реальному банківському секторі України. Математичний апарат задачі вимагає від учнів розуміння різниці між двома математичними моделями: лінійною (де приріст є постійним, оскільки відсотки нараховуються на початкову суму) та показниковою (де приріст є прогресивним, оскільки відсотки нараховуються на вже збільшену суму). Інтеграція діючих умов комерційних банків (на прикладі ставки 13% у ПриватБанку) забезпечує високу наукову та прикладну точність матеріалу.
3. Дослідницький характер. Завдання має яскраво виражений дослідницький, пошуковий характер. Замість роботи за жорстким текстовим алгоритмом, учні самостійно використовують відкриті цифрові джерела (онлайн-калькулятори), експериментують із налаштуваннями інтерфейсу, аналізують отримані дані та шукають відповідь на проблемне питання: «Чому за однакової річної ставки кінцева сума буде різною?». Процес розв'язання вимагає від здобувачів освіти висунення гіпотези, її емпіричної перевірки за допомогою ІКТ та формулювання самостійного узагальнювального висновку про переваги капіталізації.
4. Зміст та практичне застосування. Зміст задачі логічно пов'язує фінансові

інструменти (депозитні програми, банківська ставка, капіталізація) з математичними поняттями функції, аргументу та швидкості зростання графіків.

- Прогноз результату: завдяки виникненню очевидного математичного дисонансу (номінальна ставка в обох випадках однакова – 13%, але фінансовий результат різний), задача гарантує довготривале розуміння суті «складного відсотка» та механізму його нарахування.

- Практичне застосування: матеріал рекомендується використовувати на етапі мотивації вивчення показникової функції (як класичну проблемну ситуацію), під час уроків-практикумів із фінансової математики, або як індивідуальний домашній мініпроект.

5. Відповідність навчальним програмам. Задача повністю відповідає чинній навчальній програмі з математики (рівень стандарту та профільний рівень) для 10–11 класів, розділи «Показникова функція» та «Прикладні задачі на відсоткові розрахунки». Зміст завдання органічно базується на раніше засвоєних учнями знаннях:

- Поняття відсотка від числа та знаходження числа за його відсотком.
- Формула складних відсотків.

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі та її розв’язання сформульовані сучасною літературною українською мовою з дотриманням норм економічної та педагогічної термінології. Використано чіткі назви реальних банківських продуктів («Стандарт строковий»), що підсилює довіру до завдання. Числові дані округлені за правилами банківського обліку (до сотих, тобто до копійок), що демонструє учням культуру оформлення реальних фінансових документів.

7. Компетентності, які розвиває ця задача. Робота над задачею забезпечує формування ключових і предметних компетентностей відповідно до Державного стандарту профільної середньої освіти:

- Математична компетентність: формує вміння інтерпретувати графічні

та числові результати, отримані за допомогою математичного моделювання; порівнювати лінійні та показникові моделі; робити точні розрахунки на основі реальних даних.

- Інформаційно-цифрова компетентність: розвиває навички впевненого використання вебдодатків, онлайн-симуляторів та фінансових калькуляторів для розв'язання повсякденних життєвих задач.

- Підприємливість та фінансова грамотність: є ключовим елементом цієї задачі; вчить підлітків свідомо оцінювати фінансові ризики та вигоди, розуміти капіталізацію як інструмент захисту грошей від інфляції, аналізувати умови банківських угод для оптимізації власного або сімейного бюджету.

- Уміння навчатися впродовж життя: формує критичне мислення, здатність піддавати сумніву поверхові твердження (що однакова ставка завжди дає однаковий дохід) та самостійно шукати істину через практичне дослідження.

Етап закріплення знань.

Задача. В екологічному експерименті певну кількість комарів помістили у контейнер з водою та рослинністю. Популяція комарів, P , зростає і може бути змодельована функцією: $P(t) = 24 \cdot 4^{0,385t}$, $t \geq 0$, де t – час у днях від моменту, коли комарів помістили в контейнер. Знайти кількість комарів:

1. Початково поміщених у контейнер;
2. У контейнері через 5 днів.

Максимальна місткість контейнера – 5000 комарів.

3. Знайдіть кількість днів до того моменту, коли контейнер досягне своєї максимальної місткості. Для розв'язання використайте графічний калькулятор.

Розв'язання

1. $P(0) = 24 \cdot 4^{0,385 \cdot 0} = 24$

$$2.P(5) = 24 \cdot 4^{0,385 \cdot 5} \approx 346$$

$$3. P(t) = 5000. \quad 24 \cdot 4^{0,385t} = 5000; \quad 4^{0,385t} = \frac{5000}{24}; \quad 4^{0,385t} \approx 208,3333;$$

$$0,385t = \log_4(208,3333); \quad 0,385t = \frac{\lg(208,3333)}{\lg 4}; \quad 0,385t \approx \frac{2,31876}{0,60206} \approx 3,8514;$$

$$t \approx \frac{3,8514}{0,385} \approx 10,0036 \text{ днів.}$$

Кількість днів: 11.

Примітка: оскільки учням ще не знайоме поняття «логарифм» пропонуємо візуалізувати рівняння у Desmos, зобразити там показникову функцію (рис. 2. 10) та лінійну функцію ($y = 5000$) і знайти точку перетину. Графік можна переглянути за посиланням: <https://www.desmos.com/calculator/jdnhv3o92l>

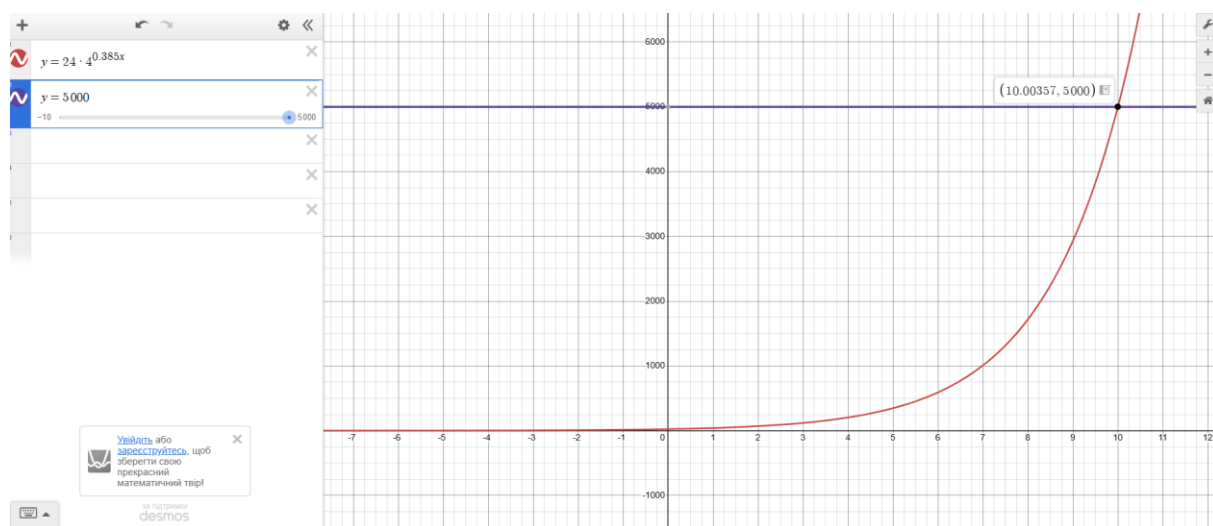


Рисунок 2. 10. Функція $P(t) = 24 \cdot 4^{0,385t}$

Методичний коментар

1. Актуальність теми. Запропонована задача відповідає сучасним потребам організації навчально-виховної роботи у старшій школі відповідно до реформи НУШ. Тематика моделювання біологічних процесів, динаміки чисельності популяцій та екологічного прогнозування є максимально життєвою, практико-орієнтованою та зрозумілою сучасному поколінню учнів. Практична значущість полягає в наочній демонстрації розвитку живих екосистем та біологічне зростання підпорядковуються чітким математичним законам – зокрема, показниковому зростанню.

2. Достатній теоретичний рівень. Тему розкрито на сучасному рівні розвитку наукових знань про прикладну екологію та популяційну біологію (взаємодія живих організмів та обмежених ресурсів середовища). У змісті матеріалу використано об'єктивні факти:

- Ефект показникового розмноження: процес збільшення чисельності популяції, математично моделюється саме через показникову залежність, де час є показником степеня.

- Аналіз параметрів моделі: розуміння ролі початкового значення (коефіцієнт 24 як стартова кількість особин) та бази і темпу зростання (основа 4 та коефіцієнт 0,385 у показнику степеня).

- Математичний апарат задачі: учні використовують поняття аргументу (час у днях), функції (поточна чисельність комарів), виконують піднесення до дробового степеня, працюють із наближеними обчисленнями та застосовують сучасні засоби навчання для розв'язування показникових рівнянь.

3. Дослідницький характер. Задача має виражений дослідницький характер, оскільки виступає інтелектуальним викликом на етапі закріплення чи узагальнення знань. Поставлені аналітичні запитання та робота з фінальним обмеженням контейнера змушують учнів зіштовхнутися з когнітивним та екологічним парадоксом: чиста показникова модель передбачає безкінечне зростання у геометричній прогресії, проте реальний простір має ліміт місткості (5000 особин). Це вимагає від учнів не просто механічного підрахунку за формулою, а глибокого критичного аналізу меж застосування математичної моделі, руйнування первинної побутової інтуїції та формулювання власної обґрунтованої думки про реальну динаміку екосистеми.

4. Зміст та практичне застосування. Матеріал викладено послідовно, лаконічно й емоційно насичено, що дозволяє утримувати фокус уваги класу протягом усього етапу практичної роботи.

- Прогноз результату: Очікується, що завдяки створенню живої проблемної ситуації та залученню цифрових інструментів візуалізації, рівень усвідомлення учнями властивостей і графіка показникової функції зросте.

- Рекомендації щодо застосування: Задачу доцільно використовувати на етапі закріплення знань або узагальнення теми «Показникова функція, її властивості та графік», під час інтегрованого повторення перед вивченням логарифмів, або як наскрізний кейс на STEM-уроках (Математика + Екологія / Біологія / Інформатика).

5. Відповідність навчальним програмам. Зміст задачі повністю відповідає чинній навчальній програмі з алгебри та початків аналізу для 11 класу (як для рівня стандарту, так і для профільного рівня), розділ «Показникова функція». Сюжет побудовано як логічний місток від абстрактних тотожностей до прикладного аналізу, спираючись на:

- Поняття показникової функції, її зростання та графічні властивості.
- Поняття показникових рівнянь.
- Властивості степенів із раціональним та дійсним показником і правила округлення результатів у прикладних задачах.

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі сформульовано сучасною літературною українською мовою з використанням коректних наукових термінів. Структура задачі розроблена з урахуванням її безпосередньої інтеграції з сучасними засобами навчання – зокрема, з інтерфейсом графічного калькулятора Desmos. Візуалізація результатів розрахунків (знаходження точки перетину графіка функції та прямої обмеження місткості) на екрані смартфона чи мультимедійної дошки підсилює технологічний, наочний та естетичний рівень сприйняття матеріалу.

7. Компетентності, які розвиває ця задача

- Екологічна грамотність і здорове життя: формування розуміння законів розвитку популяцій, обмеженості природних ресурсів екосистем, ємності середовища існування та взаємозв'язків у живій природі.
- Математична компетентність: розвиток навичок математичного моделювання реальних процесів; усвідомлення суті експоненційного зростання; вміння обирати раціональні методи розв'язування показникових рівнянь та критично оцінювати точність обчислень.
- Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ): формування навичок роботи з динамічними математичними середовищами (Desmos/GeoGebra) для графічної верифікації аналітичних гіпотез та побудови комп'ютерних моделей.
- Уміння навчатися впродовж життя: розвиток критичного і системного мислення, здатності аналізувати поведінку функцій на великих проміжках часу, інтерпретувати абстрактні математичні результати у контексті реального життя та коригувати моделі відповідно до поставлених умов.

Логарифмічна функція

Етап мотивації

Задача. Ви відкрили власний ІТ-стартап і поклали перший прибуток у розмірі 10 000 грн на депозит. Банк пропонує 10% річних у гривні. За скільки місяців сума на вашому рахунку: а) подвоїться; б) збільшиться в x разів?

Розв'язання:

$$\begin{aligned}
 \text{А) } A &= A_0 \times \left(1 + \frac{p}{12}\right)^m, \quad A_0 - \text{початкова сума вкладу; } A - \text{кінцева сума; } p - \\
 &\text{річна ставка у вигляді десяткового дробу; } m - \text{кількість місяців, яку нам} \\
 &\text{потрібно знайти. } 2A_0 = A_0 \times \left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^m; \quad 2 = (1 + 0,008)^m; \quad 2 = (1,008)^m; \\
 \ln(2) &= \ln(1,008)^m; \quad \ln(2) = m \times \ln(1,008); \quad m = \frac{\ln(2)}{\ln(1,008)} \approx \frac{0,693147}{0,007968} \approx
 \end{aligned}$$

87 місяців. Б) Міркуючи аналогічно $m(x) = \log_{\left(1+\frac{r}{12}\right)} x$. Позначивши незалежну змінну (аргумент) через x , а залежну змінну (функцію) через y , отримуємо функцію виду: $y = \log_a x$, де $a = 1 + \frac{r}{12}$ ($a > 0, a \neq 1$)

Отже, ми прийшли до поняття логарифмічної функції, де кожному додатному значенню x відповідає єдине значення показника степеня y .

Відповідь: 87 місяці.

Примітка: оскільки учні можуть тільки вгадати (підібрати) приблизне значення для розв'язку рівняння $2 = (1,008)^m$, використовуємо для розв'язку графічний калькулятор, але для учнів важливо наголосити що існує функція, за допомогою властивостей якої таке рівняння можна розв'язати дуже точно. Проте це створює підґрунтя для вивчення нового матеріалу: вчитель наголошує, що існує спеціальна логарифмічна функція, властивості якої дозволяють розв'язувати такі задачі аналітично та з будь-якою точністю.

Методичний коментар

1. Актуальність теми. Запропонована задача безпосередньо відповідає сучасним запитам профільної математичної освіти в Україні та концепції НУШ. Замість сухого означення нової функції учням пропонується життєвий кейс із близької їм сфери (розвиток ІТ-стартапу та планування капіталу). Актуальність полягає у створенні інтересу до вивчення нової теми: задача наочно демонструє, що логарифм – це не вигадана абстракція, а конкретний інструмент, який виник із практичної потреби дізнатися точний час (термін), коли капітал досягне бажаного фінансового результату.

2. Достатній теоретичний рівень. Задача побудована на логічному переході від уже відомої учням показникової функції до нової – логарифмічної. Математичний апарат задачі вимагає від учнів розуміння структури рівняння виду $a^x = b$. Перша частина завдання спирається на властивості степеня, тоді як друга частина підводить до розуміння того, що

для розв'язання рівнянь, де основа не зводиться до спільного степеня, потрібна нова математична дія. Це забезпечує високий науковий рівень та глибоке розуміння суті логарифма як операції, оберненої до піднесення до степеня.

3. Дослідницький характер. Завдання має виражений евристичний характер, оскільки побудоване на методі створення проблемної ситуації. Коли учні вміють застосовувати формулу складних відсотків, у них виникає ситуація успіху. Проте зустріч із числом 1,008, яке не є точним степенем двійки, викликає у них когнітивний дисонанс. Це стимулює здобувачів освіти до дослідження, пошуку, висунення гіпотез щодо приблизного значення невідомого та самостійного висновку про необхідність введення нового математичного поняття.

4. Зміст та практичне застосування. Зміст задачі органічно поєднує фінансову термінологію (початковий капітал, прибуток, депозит, швидкість росту) із математичними поняттями. У процесі розв'язання учні усвідомлюють, що логарифмічна функція є інструментом зворотного прогнозування – вона шукає «час», коли відомий «результат». Матеріал рекомендується використовувати як «гачок» (мотиваційний бліц) на перших хвилинах уроку під час вивчення теми «Логарифмічна функція» у 11 класі.

5. Відповідність навчальним програмам. Задача повністю відповідає чинній навчальній програмі з математики (рівень стандарту та профільний рівень) для 11 класу, розділ «Показникова та логарифмічна функції». Зміст завдання базується на міжпредметних зв'язках та забезпечує наступність навчання: вміння застосовувати показникові функції з основою $a > 1$; засвоєння поняття логарифма числа за означенням; використання графічних калькуляторів чи смартфонів для обчислення десяткових логарифмів.

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі та її аналітичне розв'язання сформульовані сучасною літературною українською мовою з дотриманням педагогічних і лінгвістичних норм. Покроковий запис

переходу від показникового рівняння до логарифмічного виразу і далі до десяткових логарифмів оформлено математично коректно. Використання знака наближеного дорівнює ($\approx$) при округленні результату до сотих виховує в учнів графічну та обчислювальну культуру.

7. Компетентності, які розвиває ця задача. Розв'язання задачі гарантує всебічний розвиток ключових компетентностей відповідно до Державного стандарту:

- Математична компетентність: розвиває вміння будувати та досліджувати математичні моделі реальних процесів, переходити від однієї функціональної моделі (показникової) до іншої (логарифмічної), виконувати наближені обчислення.

- Підприємливість та фінансова грамотність: допомагає учням зрозуміти логіку накопичення капіталу, важливість математичного планування та прогнозування в бізнесі й стартап-культурі.

- Уміння навчатися впродовж життя: формує здатність аналізувати нестандартні ситуації, здійснювати саморефлексію.

Етап закріплення знань.

Задача. На етикетках засобів для догляду за волоссям часто пишуть «рН-нейтральний» або «рН 5.5». Рівень кислотності (pH) визначається через концентрацію іонів водню $[H^+]$ за логарифмічною формулою: $pH = -\lg[H^+]$. У чистій воді концентрація іонів водню $[H^+]$ становить 10^{-7} моль/л (що дає нейтральний $pH = 7$). Під час створення очищувального шампуню для жирного типу волосся технолог збільшив концентрацію іонів водню $[H^+]$ рівно у 100 разів порівняно з чистою водою. Знайдіть pH цього шампуню. Як саме змінився рівень pH порівняно з чистою водою (збільшився чи зменшився і на скільки одиниць)?

Розв'язання

1. Обчислюємо pH за формулою: підставимо отриману концентрацію в логарифмічну формулу: $pH = -\lg(10^{-5})$. За властивістю логарифма ($\lg 10^x = x$): $pH = -(-5) = 5$

2. Порівнюємо зміни: початковий pH чистої води дорівнював 7. Новий pH шампуню дорівнює 5. $7 - 5 = 2$ одиниці.

Відповідь: концентрація іонів збільшилася до 10^{-5} моль/л, при цьому pH зменшився на 2 одиниці (середовище стало більш кислотним, що якраз підходить для очищення шкіри голови).

Робота з PhET:

1. Відкрийте симуляцію « pH Scale» (рис. 2. 11) або «Acid-Base Solutions» (рис. 2. 12).

2. Додавайте різні речовини та спостерігайте за зміною pH .

3. Порівняйте значення pH для різних концентрацій.

Математичне моделювання:

- $pH = -\log_{10}[H^+]$, де $[H^+]$ - концентрація іонів водню в моль/л
- Для води: $pH = -\log_{10}(10^{-7}) = 7$
- При збільшенні концентрації у 100 разів: $pH = -\log_{10}(10^{-5}) = 5$

Дослідницькі завдання:

1. Чому шкала pH логарифмічна, а не лінійна?

2. Як невелика зміна pH впливає на живі організми?

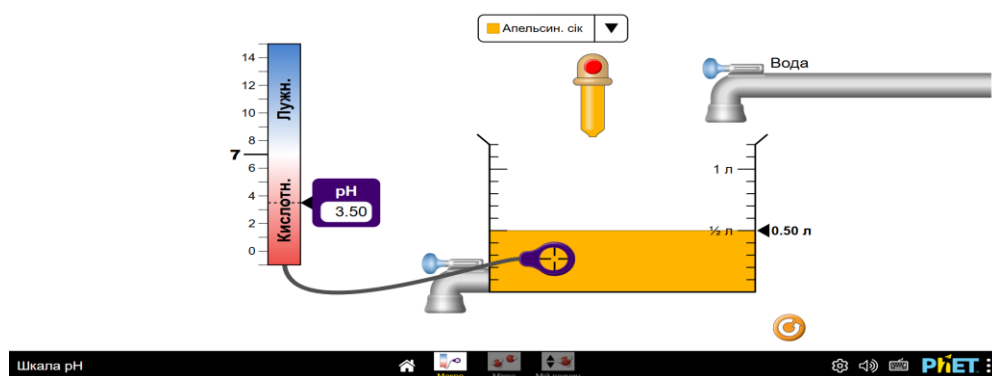


Рисунок 2. 11. Шкала pH — pH , Розрідження, Концентрація

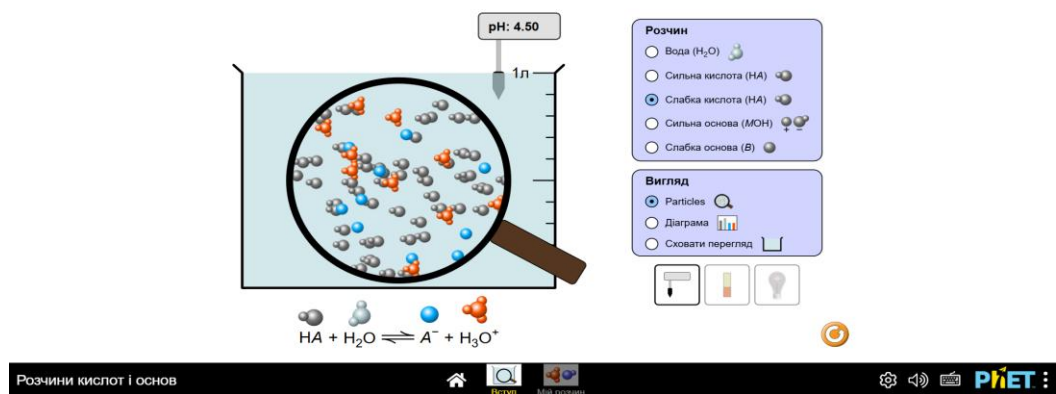


Рисунок 2. 12. Розчини кислот і основ – Кислоти, Основи, Рівновага
Методичний коментар

1. Актуальність теми. Запропонована задача безпосередньо відповідає сучасним потребам організації навчально-виховної роботи у старшій школі відповідно до реформи НУШ. Тематика математичного моделювання хімічних та біологічних процесів (зокрема, визначення кислотності середовища через показник рН) є максимально життєвою, практико-орієнтованою та яскраво демонструє міждисциплінарну інтеграцію (Математика + Хімія / Біологія). Практична значущість полягає в тому, що задача руйнує стереотип про «абстрактність» логарифмів. Вона наочно доводить учням, що такі фундаментальні природні явища, як баланс хімічних розчинів чи життєдіяльність клітин організму, описуються логарифмічною функцією.

2. Достатній теоретичний рівень. Тему розкрито на сучасному рівні розвитку наукових знань про прикладну хімію та математичне моделювання. У змісті матеріалу використано об'єктивні факти: природа водневого показника рН (рН визначається як від'ємний десятковий логарифм концентрації іонів водню, це демонструє перехід від мікросвіту до макропоказників), суть десяткового логарифма (учні на практиці бачать математичний зміст операції – знаходження степеня, до якого треба піднести основу 10), математичний апарат задачі коректний (учні оперують поняттями аргументу, властивостями логарифма та аналізують

логарифмічну залежність: при збільшенні концентрації іонів у 100 разів, показник рН зменшується на 2 одиниці).

3. Дослідницький характер. Задача має яскраво виражений дослідницький характер завдяки поєднанню аналітичних розрахунків із цифровим експериментом у середовищі PhET (симуляція «рН Scale»). Поставлені дослідницькі запитання змушують учнів зіштовхнутися з математичним та побутовим парадоксом: зміна рН усього на 2 одиниці (від 7 до 5) насправді означає колосальне збільшення кислотності розчину. Це вимагає від учнів не просто механічної підстановки чисел, а глибокого порівняння логарифмічної та лінійної шкал, руйнування первинної побутової інтуїції та формулювання власних висновків щодо біологічної ролі стабільності рН.

4. Зміст та практичне застосування. Матеріал викладено послідовно, лаконічно й емоційно насичено, що дозволяє утримувати фокус уваги класу протягом усього етапу практичної чи лабораторної роботи.

- Прогноз результату: очікується, що завдяки динамічному віртуальному моделюванню розчинів у PhET та вирішенню проблемних біологічних питань, рівень внутрішньої мотивації учнів до вивчення логарифмічної функції зросте.

- Рекомендації щодо застосування: задачу доцільно використовувати на етапі мотивації або закріплення знань під час введення теми «Логарифмічна функція, її властивості та графік», для актуалізації знань про властивості степенів з цілим показником, або як інтегрований лабораторний кейс на STEM-уроках.

5. Відповідність навчальним програмам. Зміст задачі повністю відповідає чинній навчальній програмі з алгебри та початків аналізу для 11 класу (як для рівня стандарту, так і для профільного рівня), розділ «Логарифмічна функція». Сюжет побудовано як логічний місток, що реалізує наскрізні змістові лінії та спирається на: означення логарифма та поняття десяткового логарифма; властивості степеня з від'ємним показником; поняття функції як

відповідності між величинами (зміна аргументу зумовлює зміну значення функції).

6. Грамотність і естетичність оформлення. Текст задачі сформульовано сучасною літературною українською мовою з використанням точної хімічної символіки та математичної нотації. Структура завдання розроблена із урахуванням використання передових освітніх ІТ-платформ (цифрових симуляцій PhET Колорадського університету). Візуальний супровід симуляції (віртуальні крани, колби, індикатори кольору) на екранах учнівських девайсів чи мультимедійній дошці забезпечує найвищий рівень наочності та естетики сучасного уроку.

7. Компетентності, які розвиває ця задача:

- Компетентність у галузі природничих наук, техніки і технологій: розуміння хімічної суті кислотно-лужного балансу, вміння проводити віртуальні експерименти, спостерігати, порівнювати та робити наукові висновки про вплив хімічних розчинів на живі клітини.

- Математична компетентність: формування логарифмічного мислення; усвідомлення фундаментальної відмінності між лінійною шкалою (сталі кроки додавання) та логарифмічною шкалою (кроки множення/ділення за порядками величин).

- Інформаційно-комунікаційна компетентність (ІКТ): формування стійких навичок роботи з цифровими науковими симуляторами, цифровими лабораторіями та онлайн-моделями для швидкої перевірки теоретичних гіпотез.

- Уміння навчатися впродовж життя: розвиток критичного мислення, здатності ставити під сумнів очевидні на перший погляд лінійні закономірності та аналізувати приховані процеси за допомогою суворих математичних моделей.

Враховуючи описану вище методику вивчення функцій відповідно до концептуальної моделі наведемо такі загальні *поради для вчителів під навчання змістової лінії «Функції» учнів старшої профільної школи*:

1. Створіть технічно доступні та зручні матеріали. Такі матеріали можуть мати офлайн-доступу (PDF, відео), а також використовуйте платформи з низькими системними вимогами, адаптовані під різні пристрої. Спілкуйтесь із батьками та адміністрацією для того, щоб покращити технічне забезпечення учнів.

2. Навчайте учнів та навчайтесь самостійно, покращуйте цифрові навички учасників освітнього процесу. Відвідуйте тренінги або вебінари для вчителів, для учнів створюйте детальні інструкції та організовуйте технічну підтримку.

3. Оптимізуйте обсяг та структуру навчального контенту, для запобігання перенавантаження. Створюйте невеликі навчальні модулі, використовуйте (в міру) різні онлайн засоби та гейміфікацію.

4. Для формування самодисципліни та мотивації впроваджуйте проміжний контроль, допоможіть учням визначити індивідуальні навчальні цілі та не залишайте їх сам на сам зі своїми проблемами.

5. Спробуйте покращити якість педагогічного супроводу шляхом організації зустрічей з учнями, а також спробуйте залучати інших учнів для менторської підтримки.

6. Враховуйте психологічні та соціальні аспекти навчання. Створіть безпечне освітнє середовище, яке буде націлене на розвиток емоційного інтелекту, допоможе сформувати навички співпраці та допоможе подолати соціальну ізоляцію.

7. Забезпечте дотримання авторських прав і використання якісного контенту. Використовуйте відкриті освітні ресурси, узгоджуйте використання матеріалів із правовласниками або створюйте власні навчальні матеріали.

Загалом, використання сучасних засобів навчання для вивчення основних елементарних функцій може значно полегшити процес навчання (Santiago, 2024) та зробити його більш доступним та зрозумілим для учнів. Також ці засоби навчання допоможуть зробити освітній процес більш персоналізованим, допомагають відстежувати прогрес учнів, визначати та моменти, які потребують додаткової уваги, здійснювати ефективну рефлексію. Проте, важливо не забувати, що сучасні засоби навчання повинні бути лише допоміжним засобом, а не замінювати професійний підхід вчителя. Використання сучасних засобів навчання повинно бути педагогічно виваженим, обґрунтованим та доповненим традиційними засобами навчання.

2.4. Результати експериментальної перевірки ефективності розроблених методичних рекомендацій застосування сучасних засобів навчання під час вивчення учнями ліцею змістової лінії «Функції».

Експериментальна перевірка результативності запропонованих методичних рекомендацій здійснювалася упродовж 2021–2026 рр. і була організована у форматі case study. Метод дослідження case study передбачає глибокий аналіз конкретних освітніх ситуацій у їх природному контексті, що є особливо цінним за наявності часових та організаційних обмежень. Case study дозволяє отримати багатовимірне розуміння досліджуваного явища, відстежити взаємозв'язки між факторами впливу та поведінкою учасників освітнього процесу (Coombs, 2022).

З огляду на обмеженість часу, організаційні умови та необхідність забезпечення високої внутрішньої валідності даних, саме цей формат дослідження виявився найбільш доцільним. Він не потребує масштабної вибірки чи уніфікації умов у багатьох закладах освіти, натомість забезпечує можливість детального й системного спостереження за динамікою змін у цілісному освітньому середовищі. Обраний формат дав змогу дослідити

вплив сучасних засобів навчання на формування уявлень про функції, їх властивості, графіки та застосування для розв'язання задач прикладного змісту в реальних умовах навчального середовища.

Дослідження включало три взаємопов'язані етапи: *констатувальний*, *пошуковий* та *формувальний*, метою яких була перевірка ефективності розроблених методичних рекомендацій щодо застосування сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» в 10–11 класах ліцею, а також визначення їх впливу на засвоєння матеріалу, сформованість компетентностей, навчальну мотивацію, розвиток логічного мислення та аналітичних умінь.

Констатувальний експеримент (2021–2022 рр.)

Метою констатувального експерименту було визначення реального стану використання цифрових засобів навчання у процесі вивчення функцій, виявлення основних труднощів та потреб учителів, а також рівня готовності старшокласників до роботи у цифровому освітньому середовищі.

У ході етапу були розв'язані такі завдання:

- проаналізовано науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з проблеми цифровізації навчання математичних дисциплін;
- вивчено чинні навчальні програми та стандарти старшої школи щодо вимог до вивчення функцій;
- досліджено типові методичні труднощі вчителів у застосуванні сучасних цифрових засобів при поясненні матеріалу, пов'язаного зі зміною параметрів, що визначають певні класи функцій, властивостями функцій та їх графіками, а також графічними моделями задач практичного змісту;
- проаналізовано наявні цифрові ресурси (публічні та локальні) на предмет можливості їх використання під час вивчення функцій у ШКМ;
- проведено педагогічні спостереження на уроках, опитування учнів та анкетування вчителів через Google-форми.

У констатувальному етапі взяли участь 77 учителів математики.

Проводилось анонімне і онлайн, з використанням Google forms (Года, 2022), опитування вчителів математики (додаток Г). У опитуванні взяли участь 77 вчителів, що працюють із 5-11 класами загальноосвітніх шкіл України, мають різний педагогічний стаж та кваліфікацію. Однак, ми віддавали перевагу досвідченим фахівцям – 50,6 % опитаних працюють вчителями математики понад 15 років. Нижче наведено перелік запитань та результати опитування. Після кожного з варіантів відповідей у дужках наведено відсоток від загальної кількості опитаних, котрі обрали цей варіант.

Запитання 1. Чи використовуєте Ви у своїй професійній діяльності сучасні ІКТ?

- Так, постійно (43%).
- Так, часто (46%).
- Так, іноді (10%).
- Так, але дуже рідко (1%).
- Ні, взагалі не використовую (0%).

Як бачимо, всі опитані вчителі різною мірою використовують ІКТ у своїй роботі, причому переважна більшість із них (89%) використовує їх постійно та регулярно. Така ситуація є природною, особливо в умовах значного поширення дистанційного та змішаного навчання через настання пандемічної ситуації та воєнного стану в Україні.

Запитання 2. Які саме програмні (електронні) засоби Ви використовуєте для навчання учнів (можна було обрати кілька варіантів відповідей)?

- Системи електронного контролю знань, умінь і навичок (агрегатори тестів) (86%).
- Електронні підручники різних видів (від pdf версій до мультимедійних) (77%).

- Демонстраційні засоби (відеофільми, текстові презентації тощо) (81%).
- Системи організації навчання (навчальні платформи) (64%).
- Системи пошуку даних (електронні бібліотеки, пошукові системи Internet тощо) (58%).
- Програмні засоби для навчання в ігровій формі (вікторини, змагання, головоломки тощо) (53%).
- Програми, які дозволяють моделювати експерименти, уявні або реальні життєві ситуації тощо (23%).
- Програми, що забезпечують можливість створення нових електронних ресурсів (17%).

Результати відповідей на це запитання показують, що найбільш популярними електронними засобами для вчителів є програми, котрі дозволяють здійснювати оцінювання навчальних досягнень учнів, а також електронні засоби навчання – підручники, навчальні відео та презентації. Менш популярними, але досить поширеними є системи організації навчання та пошуку даних також програми для навчання в ігровій формі. На нашу думку, це зумовлено тим, що агрегатори тестів та електронні підручники можуть використовуватися як під час навчання в класі, так і під час дистанційного та змішаного навчання, а решта згаданих електронних засобів навчання більш притаманні для онлайн уроків.

Запитання 3. Впорядкуйте за важливістю (1 - найбільш, на Вашу думку, важлива, 6 - найменш важлива) наступні змістові лінії (УЦОЯО, 2023) шкільного курсу математики (табл. 2. 5).

Можемо побачити що навіть досвідченим вчителям (51% респондентів мають досвід роботи понад 15 років) важко розподілити за важливістю вивчені теми, адже всі вони певною мірою мають широке прикладне застосування та є важливими. За цим розподілом змістова лінія

«Функції та їх графіки» знаходиться на 3 місці, що ніяким чином не нівелює її значення та необхідність її вивчення.

Таблиця 2.5.

Розподіл важливості змістових ліній шкільного курсу математики.

Змістова лінія/місце	1	2	3	4	5	6	Середнє зважене
Числа і вирази	0,7 1	0,0 6	0,0 9	0,0 4	0,0 4	0,0 5	1,78
Функції та їх графіки	0,0 9	0,1 4	0,4 0	0,1 7	0,1 0	0,0 9	3,32
Рівняння і нерівності	0,0 9	0,6 0	0,1 3	0,0 5	0,0 9	0,0 4	2,57
Планіметрія	0,0 3	0,1 7	0,2 5	0,4 4	0,0 9	0,0 3	3,48
Стереометрія	0,0 4	0,0 4	0,0 4	0,1 6	0,4 9	0,2 3	4,73
Стохастика	0,0 5	0,0 1	0,0 9	0,1 3	0,1 7	0,5 5	4,99

Запитання 4. Чи вбачаєте Ви доцільним вдосконалення методики навчання учнів матеріалу змістової лінії «Функції та їх графіки»?

- Однозначно так (22%).
- Скоріше, так (55%).
- Важко відповісти (10%).
- Скоріше, ні (12%).
- Однозначно ні (1%).

77% досвідчених вчителів математики переконані в необхідності вдосконалення методики навчання учнів змістової лінії «Функції та їх графіки».

Запитання 5. Чи забезпечені Ви наразі належними методичними матеріалами для навчання учнів змістової лінії «Функції та їх графіки»?

- Однозначно так (5%).
- Скоріше, так (48%).
- Важко відповісти (21%).
- Скоріше, ні (25%).
- Однозначно ні (1%).

Кількість учителів, котрі вважають, що вони забезпечені навчальними матеріалами щодо вивчення функцій становить близько половини від загальної кількості опитаних. Решта вчителів відчують потребу в таких матеріалах, хоча жоден із них не зазначив, що таких матеріалів взагалі немає. Це говорить про те, що ситуація з методичним забезпеченням учителів щодо вивчення змістової лінії «Функції та їх графіки» не є катастрофічною і потребує лише незначного вдосконалення.

Запитання 6. Якщо Вам не вистачає методичних матеріалів для навчання учнів змістової лінії «Функції та їх графіки», то яких саме (можна було вибрати кілька варіантів відповідей)?

- Навчальні демонстраційні матеріали (відеоролики, текстові презентації) (46%).
- Інструкції користувача щодо можливостей програмних засобів навчання (46%).
- Методичні поради, щодо використання програмних засобів навчання учнів матеріалу теми (44%).
- Готові розробки для контролю навчальних досягнень учнів (тести, контрольні роботи тощо) (38%).
- Електронні посібники (підручники, збірники задач тощо) (31%).
- Матеріали для поглибленого вивчення (1%).
- Повністю забезпечені методичними матеріалами (4%).

Як бачимо, при вивченні змістової лінії «Функції та їх графіки» вчителям найбільше не вистачає навчальних демонстраційних матеріалів, є певні проблеми з інструкціями користувача щодо можливостей програмних

засобів навчання, а також потрібні готові тести, самостійні та контрольні роботи. Зауважимо, що лише 4% з опитаних у відповіді на запитання 5 зазначили, що повністю забезпечені методичними матеріалами, що стосуються даної змістової лінії. Це підтверджує нашу впевненість у необхідності подальших методичних розробок щодо вивчення функцій, а також цілком узгоджується з відповідями на запитання 4.

Запитання 7. Якщо Ви вважаєте, що потрібно вдосконалити методику навчання учнів матеріалу змістової лінії «Функції», то що для цього можна зробити (можна було вибрати кілька варіантів відповідей)?

- Розробити методичні рекомендації по вивченню матеріалу цієї змістової лінії з використанням ІКТ (64%).
- Збільшити кількість годин для вивчення матеріалу даної змістової лінії (55%).
- Збільшити кількість готових навчальних матеріалів (електронних підручників, відеороликів, матеріалів для контролю тощо) (36%).
- Розробити методичні рекомендації щодо вдосконалення методики традиційного навчання матеріалу цієї змістової лінії (26%).
- Створити навчальне середовище з наявною систематизованою базою матеріалів та можливостями контролю і самоконтролю (1%).

Відповіді на це запитання показують, що половина опитаних учителів є прихильниками екстенсивного шляху забезпечення засвоєння необхідного матеріалу і бажають збільшення кількості годин на вивчення теми. Однак, такий шлях, має обмежену ефективність, оскільки збільшення навчального часу не гарантує позитивного результату. Крім того, змістову лінію «Функції та їх графіків» не можна назвати найголовнішою серед усіх інших, а отже, збільшення кількості навчального часу саме на неї є сумнівним ще й із цієї причини.

Однак, приємно, що значно більше вчителів розуміє безперспективність екстенсивного шляху і обирають інтенсивний –

вдосконалення методичних рекомендацій щодо вивчення функцій (як за традиційною методикою, так і з використанням ІКТ) (Birgin & Uzun Yazıcı, 2021; Öçal, 2017). На цьому інтенсивному шляху забезпечення якості навчання природною видається і потреба в збільшенні кількості готових навчальних матеріалів із використанням сучасних технологій, на якій наголошують опитані вчителі.

Підсумовуючи всі дані опитування, можемо зазначити, що:

- більшість сучасних вчителів математики, а особливо вчителів із великим досвідом роботи в школі, постійно використовують сучасні засоби навчання у своїй педагогічній діяльності;
- спектр використання сучасних засобів навчання в навчанні математики досить широкий – від електронних засобів (підручників, навчальних відео тощо) до засобів контролю результатів навчальної діяльності учнів;
- змістова лінія «Функції та їх графіки» не є на думку вчителів найголовнішою змістовою лінією курсу математики в школі, але важливість її є незаперечною;
- у вчителів немає сумнівів щодо необхідності вдосконалення методики навчання учнів матеріалу змістової лінії «Функції та їх графіки», а також у потребі розробки відповідних методичних матеріалів, зокрема, з використанням сучасних технологій навчання.

Отримані результати констатувального експерименту засвідчили необхідність створення методичних рекомендацій, орієнтованих на цифрове середовище.

Пошуковий експеримент (2022–2023 рр.)

На цьому етапі було здійснено відбір, апробацію та адаптацію сучасних цифрових засобів навчання, таких як GeoGebra, ClassTime, Wordwall, Desmos, цифрові симуляції, AhaSlides, LearningApps, які

забезпечують можливість аналізу графіків функцій, зміни параметрів функцій і спостереження наслідків, організації формувального оцінювання, створення адаптивних тренажерів, інтерактивного опитування і зворотного зв'язку. Також особливе місце посідає система Google Workspace for Education (Google Class, Google Forms, Google Drive, Google Meet, Google Sites). Її використання дозволило створити навчальне середовище, у якому учням не потрібно витрачати час на перемикання між сторонніми сервісами, що підвищило концентрацію уваги на предметному матеріалі. У процесі вивчення змістової лінії «Функції» у 10–11 класах Google Workspace for Education, було «ядром» навчальної взаємодії:

- Google Class: слугував єдиним простором, де структурувався навчальний матеріал за темами (степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні функції). У ньому розміщувалися цифрові завдання, посилання на динамічні тренажери тощо.
- Google Drive: забезпечував збереження та впорядкування графічних матеріалів, учнівських міні проєктів, конспектів із властивостями функцій та шаблонів для аналізу математичних моделей.
- Google Forms: застосовувалися для проведення експрес-діагностики та формувального оцінювання. Розроблені тести з додаванням зображень допомагали перевіряти вміння учнів «зчитувати» властивості функцій із їх графіків (область визначення, множина значень, проміжки зростання/спадання, екстремуми тощо).
- Google Meet: організовував синхронну взаємодію під час дистанційного чи змішаного навчання. Функція демонстрації екрана дозволяла вчителю та учням у реальному часі коментувати побудову складних графіків, перетворення графіків функцій тощо.

Слід підкреслити, що впровадженню зазначених цифрових засобів передувало підвищення професійної компетентності вчителя – зокрема, успішне проходження сертифікованих курсів від Google (Google for

Education) та інших (додаток Т), що дозволило систематизувати процес взаємодії та інтегрувати сучасні засоби навчання у навчальний процес. Практична реалізація здійснювалася безпосередньо у співпраці з учнями: на уроках організовувалися навчальні дослідження, де школярі виступали не пасивними слухачами, а активними суб'єктами пізнавальної діяльності.

За результатами пошукового етапу було встановлено, що найбільш ефективними у старшій школі є середовища, що дозволяють учням самотійно змінювати параметри (коефіцієнти аналітичного задання) функцій, досліджувати особливі точки графіків функцій та інтерпретувати математичні моделі реальних процесів. Зазначені висновки сформовано на основі порівняльного аналізу можливостей сучасних засобів навчання, а також на власному педагогічному досвіді. Проводячи порівняльний аналіз сучасних засобів навчання нами було встановлено, що для закріплення понять, тренування обчислювальних навичок та рефлексії підходять LearningApps та Wordwall; GeoGebra та Desmos є ефективними для розвитку критичного мислення та аналізу прикладних задач, допомагають візуалізувати функції; використання ClassTime та AhaSlides дозволило проводити діагностику розуміння властивостей функцій в режимі реального часу, миттєво виявляти типові помилки та коригувати хід уроку, на відміну від традиційного паперового опитування.

На основі власного педагогічного досвіду ми прийшли до висновків, що учні, які досліджували властивості функцій за допомогою динамічних слайдерів у Desmos/GeoGebra, значно легше давалися завдання з параметрами та інтерпретація графіків у реальних прикладах (фізичні, економічні процеси); можливість «помацати» математичну модель підвищила рівень залученості учнів (особливо з середнім рівнем успішності) та сформувала стійке розуміння причинно-наслідкових зв'язків («як зміна коефіцієнта k чи b впливає на графік функції»); автоматизація

перевірки базових завдань вивільнила час на уроці для обговорення проблемних питань та пошуково-дослідницької діяльності.

У межах пошукового експерименту у 2023 році нами було проведено вебінар для вчителів ліцею № 190 Деснянського району міста Києва «Інновації в методиці застосування сучасних засобів навчання» (Додаток Ж) та зроблено окремий виступ для викладачів коледжу Київського фахового коледжу комп'ютерних технологій та економіки Державного некомерційного підприємства «Державний університет «Київський авіаційний інститут» (Додаток Б), під час яких розроблені рекомендації були представлені, обговорені та уточнені.

Формувальний експеримент (2023–2026 рр.)

Експериментальний вплив реалізовувався у контрольних та експериментальних групах 10 – 11 класів ліцею № 190 Деснянського району міста Києва (Додаток В) за однакових умов: єдиний підручник, однакова кількість годин, спільні навчальні програми. У контрольній групі (14 учнів) навчання здійснювалося традиційно, а в експериментальній (24 учні) систематично застосовувалися вказані цифрові інструменти, а також онлайн-тестування, цифрові симуляції, завдання з параметрами, аналіз графіків у динаміці, міні дослідження на основі даних.

Отримані дані підтверджують доцільність розроблення й упровадження методичних рекомендацій, орієнтованих на інтеграцію цифрових засобів навчання у процес вивчення змістової лінії «Функції», що узгоджується з метою експериментального дослідження та гіпотезою про ефективність цифрово-орієнтованої методики.

Статистичне підтвердження ефективності

Для встановлення відмінностей у результатах навчання між контрольною та експериментальною групами проводилися контрольні та самостійні роботи, спостереження за навчальною діяльністю учнів,

вимірювання здійснювалось в порядковій шкалі. При оцінюванні контрольної роботи з теми «Функції та їх властивості» (додаток Д) число градації $L = 12$ (тобто, кількість різних балів ≥ 3), то

Для перевірки наявності або відсутності відмінностей між засвоєнням теми «Функції та їх властивості» було застосовано критерій χ^2 .

(Бодненко та ін., 2014). Ми порівнювали два 10-х класи (контрольна група – 14 учнів, експериментальна – 24) за результатами контрольної роботи з теми «Функції та їх властивості» (додаток Д). Результати контрольної роботи можна переглянути в таблиці 2. 6.

Таблиця 2.6.

Результати контрольної роботи з теми «Функції та їх властивості»

<i>№</i>	<i>Контрольна група</i>	<i>№</i>	<i>Експериментальна група</i>
1	5	1	4
2	8	2	11
3	6	3	10
4	4	4	11
5	4	5	9
6	7	6	7
7	4	7	6
8	4	8	9
9	4	9	6
10	8	10	10
11	5	11	4

12	3	12	7
13	7	13	8
14	8	14	9
		15	4
		16	12
		17	6
		18	10
		19	11
		20	7
		21	4
		22	7
		23	10
		24	11

Оцінки кожного із класів згрупуємо за рівнем навчальних досягнень (таб. 2. 7), де: низький рівень 1-3 бали, середній рівень 4-6 балів, достатній рівень 7-9 балів, високий рівень 10-12 балів.

Таблиця 2. 7

Рівні навчальних досягнень

Рівні навчальних досягнень	Контрольна група	Експериментальна група
Низький	1	0
Середній	8	7

Достатній	5	8
Високий	0	9

Нами було сформульовано 2 гіпотези:

H_0 : Статистично значущої різниці між результатами контрольної та експериментальної груп немає (методика не впливає на результати).

H_A : Статистично значуща різниця між результатами контрольної та експериментальної груп існує (методика має вплив на результати).

Оскільки, об'єми вибірок різні для даного критерію обчислюємо емпіричне значення критерію за формулою:

$$\chi^2_{\text{емп}} = N \cdot M \cdot \sum_{i=1}^L \frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i + m_i},$$

де N, M — об'єми вибірок, L — ступінь свободи. Критичні значення критерію χ^2 для рівня значущості $\alpha = 0,05$ становить 7,82 (Бодненко та ін., 2014). Розрахунки критичного та емпіричного значень критерію χ^2 показано в таблиці 2. 8.

Таблиця 2. 8

Розрахунки критерію χ^2

Рівні навчаль них досягне нь	Контрол ьна група	Експеримент альна група				
	n_i	m_i	$\frac{n_i}{N}$	$\frac{m_i}{M}$	$\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M}\right)^2$	$\frac{\left(\frac{n_i}{N} - \frac{m_i}{M}\right)^2}{n_i + m_i}$
Низький	1	0	0,0714 29	0	0,005102 041	0,005102 041

Середній	8	7	0,5714 29	0,2916 67	0,078266 723	0,005217 782
Достатній	5	8	0,3571 43	0,3333 33	0,000566 893	4,36072E -05
Високий	0	9	0	0,375	0,140625	0,015625
Сума	14	24				0,025988 43
					$\chi^2_{\text{емп}}$	8,732112 332
					$\chi^2_{\text{крит}}$	7,814727 903

Оскільки $\chi^2_{\text{емп}} > \chi^2_{\text{крит}}$ то нульову гіпотезу (H_0) відхиляємо, а приймаємо альтернативну гіпотезу (H_A) та робимо висновок, що статистично значуща різниця між результатами контрольної та експериментальної груп існує (методика має вплив на результати) на рівні значущості $\alpha = 0,05$.

Отримані результати свідчать про позитивний вплив використаних засобів навчання на сформованість умінь і знань учнів, що проявляється у підвищенні навчальних результатів в експериментальній групі порівняно із традиційним підходом у контрольній групі. Таким чином, запропоновані методичні підходи можуть бути обґрунтовано рекомендовані для подальшого впровадження в навчальний процес вивчення функцій у ліцеї.

Загальні висновки за результатами експериментальної перевірки

Експериментальна перевірка результативності розробленої методики використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» у старшій школі засвідчила їхню ефективність у реальних умовах освітнього процесу. Перевірка цієї ефективності була проведена у форматі

case study, що забезпечило комплексний аналіз взаємозв'язків між застосованими методичними засобами, поведінковими проявами учасників та навчальними результатами старшокласників.

На констатувальному етапі виявлено, що вчителі активно використовують інформаційно-комунікаційні технології у своїй професійній діяльності, однак відчують потребу в якісних методичних матеріалах та інструктивних розробках для підвищення ефективності опрацювання теми «Функції та їх графіки». Зафіксовано також невисокий рівень забезпеченості педагогів дидактичними засобами, орієнтованими на цифрове освітнє середовище.

У ході пошукового етапу було здійснено відбір і апробацію цифрових засобів навчання (GeoGebra, ClassTime, Wordwall, Desmos, цифрові симуляції тощо), які продемонстрували високу дидактичну релевантність у формуванні вмінь і навичок змістової лінії «Функції», поетапному розвитку аналітичних умінь та організації формувального оцінювання. Результати апробації дозволили уточнити зміст і структуру методичних рекомендацій, а також визначити доцільні форми їх упровадження.

За результатами формувального етапу учні експериментальної групи продемонстрували вищі результати виконання контрольної роботи порівняно з учнями контрольної групи. Отримані результати свідчать про кращий рівень засвоєння навчального матеріалу з досліджуваної теми в експериментальній групі. Спостереження за навчальною діяльністю учнів також дали змогу зафіксувати особливості їхньої роботи з цифровими інструментами та графічними моделями; ці результати мають описовий характер.

Співставлення результатів контрольної та експериментальної груп підтверджує, що впровадження розробленої методики вивчення змістової лінії «Функції» підвищує рівень засвоєння матеріалу даної змістової лінії учнями ліцею. З огляду на обмежений обсяг вибірки отримані результати

слід розглядати як емпіричні свідчення результативності запропонованої методики в досліджуваних умовах. Подальша перевірка методики потребує залучення більшої кількості учнів і закладів освіти. Розроблена методика вивчення змістової лінії «Функції» рекомендується для практичного застосування у ліцеях з метою підвищення ефективності навчання та розвитку компетентностей учнів.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертаційної роботи нами розроблено *концептуальну модель використання сучасних засобів навчання* під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею. Структура цієї моделі, її цілі, змістові та процесуальні компоненти, а також механізми інтеграції сучасних засобів навчання у навчальний процес визначено на основі аналізу педагогічних, інформаційних і психологічних чинників. Подана концептуальна модель охоплює організаційно-методичне, змістове й технологічне забезпечення навчання, враховує вікові особливості старшокласників та передбачає використання формувального оцінювання, самостійної та групової навчальної діяльності. Описану модель рекомендуємо використовувати для вивчення учнями степеневих, показникової, логарифмічної та тригонометричних функцій. Вчителі, можуть використовувати дану розробку для: динамічної візуалізації під час вивчення функцій та їх властивостей; організацію поетапного дослідження графіків шляхом зміни параметрів їх аналітичного задання і аналізу впливу цих змін на поведінку функції; застосування цифрових інструментів для формування вмінь порівнювати аналітичний запис функції з її графічним поданням тощо.

Методичні рекомендації, які вказані до розробленої концептуальної моделі, передбачають поетапне застосування цифрових середовищ і онлайн-сервісів на різних етапах навчання: для введення та осмислення нових

понять через динамічну візуалізацію; для організації дослідницької діяльності учнів шляхом зміни параметрів функцій і аналізу відповідних змін графіків; для наочного вивчення властивостей степеневих, показникових, логарифмічних і тригонометричних функцій; а також для цілеспрямованого формування вмінь аналізу, порівняння та інтерпретації графіків у поєднанні з аналітичним поданням функцій.

Розроблений комплекс дидактичних матеріалів з теми «Функції» спрямований на моделювання реальних процесів і явищ за допомогою степеневої, показникової, логарифмічної та тригонометричних функцій та формування вмінь застосовувати математичні знання, вміння та навички у навчально-практичній діяльності.

За результатами підсумкової контрольної роботи учні експериментальної групи продемонстрували статистично вищі результати порівняно з учнями контрольної групи. Зміст контрольних завдань передбачав застосування знань про функції та їх властивості, тому отримані результати можуть розглядатися як свідчення кращого засвоєння відповідного навчального матеріалу в експериментальній групі. Обмежений обсяг вибірки не дозволяє нам зробити загального висновку щодо ефективності пропонованої в роботі методики, але дає підстави сподіватися, що ця методика буде ефективною і на статистично значущій вибірці.

Отже, на підставі проведеного в розділі 2 дослідження ми можемо стверджувати, що інтеграція та впровадження сучасних засобів навчання у процес вивчення функцій, може забезпечувати підвищення рівня сформованості знань, умінь і навичок учнів ліцею. Отримані результати дослідження створюють підґрунтя для подальшого вдосконалення методики навчання математики у ліцеях, зокрема під час вивчення змістової лінії «Функції».

ВИСНОВКИ

Відповідно до вимог Державного стандарту профільної середньої освіти (КМУ, 2024) та концептуальних засад Нової української школи, зміст і методика навчання математики мають бути спрямовані на: формування в учнів ключових компетентностей; розвиток умінь застосовувати математичні знання для розв'язування навчальних і практико-орієнтованих завдань; здійснювати аналіз, моделювання та інтерпретацію результатів прикладних задач з використанням сучасних засобів навчання. Реалізація зазначених вимог передбачає забезпечення діяльнісного та компетентнісного підходів до організації освітнього процесу, поєднання теоретичної підготовки з практичною та дослідницькою діяльністю учнів, а також створення умов для усвідомленого засвоєння математичних понять і способів дій.

Зазначені вимоги набувають особливої актуальності під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею, яка відповідно до чинних освітніх програм є базовою складовою курсу алгебри і початків аналізу та забезпечує формування в учнів системних уявлень про функціональні залежності. Водночас складність абстрактного змісту цієї лінії та необхідність оперування графічними, аналітичними й прикладними вміннями і навичками, що стосуються функцій, зумовлюють потребу в удосконаленні методики її навчання шляхом цілеспрямованого використання сучасних засобів навчання.

У дисертації розв'язано наукову проблему обґрунтування доцільності та можливості використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею, а також запропоновано авторську методику цього використання в навчальному процесі закладів загальної середньої освіти. Мету дослідження досягнуто, поставлені завдання виконано, а отримані результати узгоджуються з висунутою гіпотезою щодо результативності запропонованої методики.

Відповідно до поставленої мети та визначених завдань дослідження отримано такі результати:

- здійснено аналіз вітчизняних і зарубіжних психолого-педагогічних та методичних досліджень з проблеми навчання змістової лінії «Функції» в закладах загальної середньої освіти;
- з'ясовано стан реалізації діяльнісного та компетентнісного підходів у практиці навчання функцій у ліцеї та виявлено основні труднощі їх упровадження;
- уточнено зміст поняття «сучасні засоби навчання» у контексті вивчення змістової лінії «Функції» та систематизовано їх основні види;
- розроблено концептуальну модель методики використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» учнями ліцею;
- розроблено методичні рекомендації, добірки практико-орієнтованих задач, цифрові моделі, навчальні кейси, авторські проекти та онлайн-завдання;
- здійснено експериментальну апробацію розробленої методики та отримано емпіричні дані щодо її результативності.

Отримані результати наукового дослідження дозволяють сформулювати такі **висновки**:

1. Проблема недостатньої відповідності традиційних підходів до навчання змістової лінії «Функції» сучасним вимогам освіти є актуальною та визнається як у педагогічній теорії, так і в практиці сучасної школи. Традиційні зміст, форми та методи навчання функцій не завжди повною мірою забезпечують: прикладну спрямованість ШКМ; розвиток дослідницьких умінь учнів; врахування психолого-педагогічних особливостей сучасних учнів.

2. Використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції» виступає ефективним педагогічним інструментом реалізації діяльнісного та компетентнісного підходів за умови дотримання таких

вимог: педагогічної вираженості та системності їх застосування; урахування вікових та індивідуальних особливостей учнів; поєднання візуалізації навчального матеріалу з активною пізнавальною діяльністю; реалізації ролі вчителя як модератора та фасилітатора освітнього процесу.

3. На основі проведеного в роботі уточнення змісту поняття «сучасні засоби навчання» стосовно математичних дисциплін можна зробити висновок, що їх слід розглядати не лише як технічне обладнання, а як цілісний дидактичний комплекс (цифрові платформи, динамічні середовища, мобільні застосунки). Це забезпечує активізацію когнітивної діяльності та візуалізацію складних математичних абстракцій.

4. Класична методика вивчення змістової лінії «Функції» потребує модернізації через виявлений розрив між теоретичними знаннями учнів та їх здатністю застосовувати функціональні залежності на практиці. Зокрема, використання цифрових засобів може бути одним із дієвих методичних засобів подолання формалізму в знаннях учнів та підтримки діяльності з побудови й інтерпретації графіків функцій.

5. Запропонована в дослідженні концептуальна модель вивчення функцій у ліцеї, яка базується на принципах системності, інтерактивності та суб'єктності розкриває механізми переходу від ілюстративного використання сучасних засобів навчання до дослідницько-орієнтованого навчання, де учень стає активним учасником побудови математичних моделей. На основі цієї концептуальної моделі практикуючі вчителі математики можуть навчати учнів ліцею матеріалу змістової лінії «Функції» з використанням сучасних засобів навчання, а також створювати дидактичні матеріали для проведення уроків, де застосовуються цифрові технології навчання.

6. Авторська методика навчання функцій у ліцеї, ключовою особливістю якої є інтеграція динамічних математичних середовищ (Geogebra, Desmos тощо) у навчальний процес, допомагає здійснити перехід

від алгоритмічного зображення графіків до глибокого аналізу властивостей функцій, розвитку прогностичних умінь та формування розуміння функціональних залежностей та застосування функцій до дослідження та аналізу реальних процесів ліцеїстів. Це допомагає учням краще розуміти сутність поняття функції та їх властивостей, сприяє розвитку вміння учнів застосовувати функції та їх властивості для розв'язування як математичних задач, так і задач практичного змісту.

7. Комплекс дидактичних матеріалів (система прикладних задач, цифрові аркуші, кейси та навчальні проекти), розроблений нами в роботі, сприяє реалізації міжпредметних зв'язків і підвищує інтерес до вивчення математики через усвідомлення її реальної значущості. Цей комплекс можуть використовувати вчителі для формування ключових компетентностей учнів ліцею передбачених Державним стандартом старшої профільної школи, зокрема математичної компетентності. Також даний комплекс природно використовувати на уроках засвоєння нових знань, закріплення вивченого матеріалу, систематизації та повторення навчального матеріалу, контрольних занять та для подолання освітніх втрат в урочний та позаурочний час.

8. Розроблені в роботі методичні рекомендації (конкретні алгоритми використання цифрових інструментів при вивченні степеневі, показникової, логарифмічної та тригонометричних функцій), які ми пропонуємо вчителям, забезпечують їх технологічну готовність до впровадження інноваційних засобів навчання в навчальний процес у ЗЗСО. Також ці методичні рекомендації сприяють забезпеченню належного рівня методичної компетентності та цифрової грамотності вчителів математики в системі їх неперервної освіти та підвищення кваліфікації.

9. Результати експериментальної перевірки запропонованої в роботі методики, на обмежній вибірці (case study) дають підстави сподіватися, що її педагогічно виважене та системне впровадження забезпечить: підвищення

рівня сформованості математичної компетентності учнів ліцею; зростання мотивації учнів до навчання; поглиблення знань учнів про функціональні залежності; розвиток умінь учнів застосовувати набуті знання та вміння для розв'язування практико-орієнтованих задач.

10. Перспективи подальших наших досліджень з тематики роботи пов'язані з розробкою методик персоналізованого навчання змістової лінії «Функції» з використанням сучасних засобів навчання на основі технологій ІІІ та інформаційно-комунікаційних технологій, а також із поглибленням міжпредметної інтеграції та прикладної спрямованості навчання функцій. Перспективними є також дослідження, спрямовані на уточнення критеріїв оцінювання результатів навчання у межах змістової лінії «Функції» та рівнів сформованості математичної компетентності, визначених відповідно до груп результатів навчання, згідно з вимогами Державного стандарту старшої профільної школи. Також ми плануємо здійснити перевірку ефективності пропонованої в роботі методики на статистично значущій вибірці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abramov, A., & Karp, A. (2010). Toward a History of Mathematics Education Reform in Soviet Schools. In A. Karp & B. R. Vogeli (Eds.), *Russian Mathematics Education: History and World Significance* (Vol. 4, pp. 87–140). World Scientific.
2. Alfiras, M., & Bojiah, J. (2020). Printed textbooks versus electronic textbooks: A study on the preference of students of Gulf University in Kingdom of Bahrain. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, 15(20), 210–223. <https://doi.org/10.3991/ijet.v15i20.15217>
3. Almeida, L., & Santos, C. (2024). Evaluating the impact of active and experiential learning on mathematics achievement. *Cogent Education*, 11(1), Article 2436698. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2024.2436698>
4. Bakker, A., Cai, J., & Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: An international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, 107(1), 1–24. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w>
5. Balakrishnan, R., & Dhevi, R. M. (2024). The role of interactive learning in mathematics education: Fostering student engagement and interest. *Malaya Journal of Matematik*, 12(1), 342–350. <https://malque.pub/ojs/index.php/msj/article/view/3082>
6. Bogatchuk, S., & Bogatchuk, V. (2024). Features of development of education in ukraine in the 50-80s of the twentieth century. У Evolution of socio-economic development of ukraine: Historical context, modern challenges and european integration (с. 161–206). International Science Group. <https://doi.org/10.46299/979-8-89619-786-7.3>
7. Canto López, M. d. C., Manchado Porras, M., Piñero Charlo, J. C., Mera Cantillo, C., Delgado Casas, C., Aragón Mendizábal, E., & García Sedeño, M. A. (2022). Description of main innovative and alternative methodologies for

mathematical learning of written algorithms in primary education. *Frontiers in Psychology*, 13. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.913536>

8. Canva. (n.d.). Canva. https://www.canva.com/uk_ua/
9. Classtime. (n.d.). Classtime. <https://www.classtime.com/uk.html>
10. Coombs, H. (2022). Case study research: Single or multiple. *Undergraduate Journal of Communication*. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7604301>
11. Dharmarajlu, S. M. (2025). A comparison study of electronic versus traditional print textbooks on the influence of university students' learning. *Journal of Educators Online*, 22(3). <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1474004.pdf>
12. Dunn, P. K., & Marshman, M. F. (2019). Teaching mathematical modelling: A framework to support teachers' choice of resources. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 39(2), 127–144. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrz008>
13. H5P. (n.d.). H5P – create and share rich HTML5 content and applications. <https://h5p.org/>
14. Hoda, T. (2025). Methodological approaches to overcoming learning losses in the topic “Logarithmic function” through interactive learning tools. *ScienceRise: Pedagogical Education*, (3(64)), 66–70. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2025.338936>
15. iLearn. (2021). Вебінар 4. Поняття функції. Основні властивості функцій. ЗНО 2021 з математики [Відео]. [www.youtube.com. https://www.youtube.com/live/RRIIMnCDd4A?si=4U15KA_sHvGiv3DL](https://www.youtube.com/live/RRIIMnCDd4A?si=4U15KA_sHvGiv3DL)
16. Kahoot! AS. (2012). *Join a game of kahoot | Kahoot!* Kahoot! <https://kahoot.it/>
17. Kramarenko, T. G., Pylypenko, O. S., & Muzyka, I. O. (2020). Mathematical education at Kryvyi Rih State Pedagogical University: History,

analysis of achievements and prospects of development. SHS Web of Conferences, 75, 01006. <https://doi.org/10.1051/shsconf/20207501006>.

18. LearningApps.org – interaktive und multimediale Lernbausteine. (n.d.). LearningApps. <https://learningapps.org/>

19. Makonye, J. P. (2014). Teaching functions using a realistic mathematics education approach: A theoretical perspective. International Journal of Educational Sciences, 7(3), 653–662. <https://doi.org/10.1080/09751122.2014.11890228>

20. Matos, J. F., Gomes, R. N., & Rios, G. A. (2023). Active learning strategies for an effective mathematics teaching and learning. European Journal of Educational Research, 12(4), 1899–1913. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1385531.pdf>

21. Neretin, Y. A. (2019). The Kolmogorov reform of mathematical education, 1970–1980. arXiv.

22. Online python - IDE, editor, compiler, interpreter. (б. д.). Online Python - IDE, Editor, Compiler, Interpreter. <https://www.online-python.com/>

23. OpenAI. (б. д.). ChatGPT. <https://chatgpt.com/>

24. PhET Interactive Simulations. (б. д.). PhET. <https://phet.colorado.edu/>

25. Piaget, J. (1952). The origins of intelligence in children. International Universities Press.

26. Santiago, E. (2024). The teaching of trigonometry using the GeoGebra software as a teaching-learning tool. Seven Publicações. <https://sevenpubl.com.br/editora/article/download/4837/8815/19534>

27. Tanner, M. (2014). Digital vs. print: Reading comprehension and the future of learning. International Journal of Education and Literacy Studies, 2(1), 1–10. <https://www.semanticscholar.org/paper/e082b0dfcc2f82bf1b471f9f70066401d70f5c56>

28. Veesar, M. H., & Khaskheli, G. A. (2019). Effects of teaching strategies on students' motivation in learning of mathematics at secondary level. *The Sindh University Journal of Education*, 48(I), 63–80.
29. Wisenöcker, A. S., Binder, S., Holzer, M., Valentic, A., Wally, C., & Große, C. S. (2023). Mathematical problems in and out of school: The impact of considering mathematical operations and reality on real-life solutions. *European Journal of Psychology of Education*, 39(3), 767–783. <https://doi.org/10.1007/s10212-023-00718-0>
30. Wizer.me. (б. д.). Wizer.me.<https://vchymo.com/app/application/Wizerme>
31. Акименко, Н., Папач, О., & Яковлева, О. (2024). Використання кейс-технологій при розв'язанні задач економічного змісту в базовій школі. *Фізико-математична освіта*, 39(3), 12–23.
32. Алексеева, С. (2023). Дидактичний алгоритм розроблення індивідуальної освітньої траєкторії. *Витоки педагогічної майстерності*, (32), 5–9. <https://doi.org/10.33989/2075-146x.2023.32.292607>
33. Бахмат, Н. (2021). Формування основ фінансової грамотності молодших школярів на уроках математики в новій українській школі. *Педагогічна освіта: теорія і практика*, (31), 107–122.
34. Бахрушин, В., & Ніколаєв, Є. (2019). Методичні рекомендації для закладів вищої освіти з підтримки принципів академічної доброчесності (41 с.).
35. Бевз, В. (2019). Реформування математичної освіти в Україні. У Вчора. Сьогодні. Завтра. Проблеми математичної освіти ПМО – 2019 (с. 34–35).
36. Бевз, Г. П. (1989). Методика викладання математики (3-тє вид.). Вища школа.
37. Бевз, Г. П. (2001). Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Київ: Освіта.

38. Бевз, Г. П. (2002). Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Київ: Освіта.
39. Бевз, Г., & Бевз, В. (2018). Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Видавничий дім «Освіта».
40. Беденко, М., Клочко, І., Кордиш, Т., & Тадеєв, В. (2021). Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України № 795 від 12.07.2021 р.). Міністерство освіти і науки України.
41. Березівська, Л., Гавриленко, Т., Міхно, О., & Сухомлинська, О. (Ред.). (2022). Антологія текстів з реформування змісту загальної середньої освіти в Україні (1991–2017): хрестоматія. ТВОРИ.
42. Бичко, Г., & Терещенко, В. (2023). Навчальні втрати: сутність, причини, наслідки та шляхи подолання (Т. Вакуленко, Наукова консультантка). Український центр оцінювання якості освіти.
43. Біляніна, О., Білянін, Г., Семчук, А., Ілащук, О., Мар'янчук, О., & Рябий, С. (2023). Модельна навчальна програма «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 27.12.2023 № 1575). Міністерство освіти і науки України.
44. Біляніна, О., Білянін, Г., Семчук, А., Ілащук, О., Мар'янчук, О., & Рябий, С. (2023). Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 27 грудня 2023 року № 1575). Міністерство освіти і науки України.
45. Бодненко, Д., Жильцов, О., Лещинський, О., & Мазур, Н. (2014). Моніторинг навчальної діяльності. Київський університет імені Бориса Грінченка.

46. Благодир, Л. (уклад.). (2018). Методика навчання математики в поняттях, схемах і таблицях: навчально-методичний посібник. ВПЦ «Візаві».

47. Брадiс, В. (2011). Чотиризначні математичні таблиці для середньої школи. Весна.

48. Бурда, М., & Васильєва, Д. (2021). Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України № 795 від 12.07.2021 р.). Міністерство освіти і науки України.

49. Бурда, М., Тарасенкова, Н., & Васильєва, Д. (2023). Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 24.07.2023 № 883). Міністерство освіти і науки України.

50. Бурда, М., Тарасенкова, Н., & Васильєва, Д. (2023). Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 24.07.2023 № 883). Міністерство освіти і науки України.

51. Бурда, М., Тарасенкова, Н., Васильєва, Д., & Вашуленко, О. (2018). Концепція математичної освіти 12-річної школи (Проект). Математика в рідній школі, (9), 2–8.
<https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/711990/1/Концепція%20математичної%20освіти.pdf>

52. Вакуленко, І. (2021). Комп'ютерно орієнтована система управління самостійною роботою студентів педагогічних університетів у процесі навчання інформатики (Неопублікована дисертація кандидата педагогічних наук). Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Міністерство освіти і науки України.

53. Василишин, М., Милянiк, А., Працьовитий, М., Простакова, Ю., & Шкoльний, О. (2021). Модельна навчальна програма «Математика. 5-

6 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України № 795 від 12.07.2021 р.). Міністерство освіти і науки України.

54. Василюшин, М., Милянник, А., Працьовитий, М., Простакова, Ю., & Шкільний, О. (2023). Модельна навчальна програма «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 24.07.2023 № 883). Міністерство освіти і науки України.

55. Васильєва, Д. (2020, 13 січня). Як зробити навчання математики цікавим і продуктивним. Нова українська школа | Веб-ресурс НУШ. <https://nus.org.ua/2020/01/13/yak-zrobyty-navchannya-matematyky-tsikavym-i-produktyvnym/>

56. Верховна Рада України. (2017). Закон України «Про освіту» від 05.09.2017 № 2145-VIII. (2017). Відомості Верховної Ради України, (38–39), 380. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19>

57. Верховна Рада України. (2020). Закон України «Про повну загальну середню освіту» від 16.01.2020 № 463-IX. (2020). Відомості Верховної Ради України, (31), 224. <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20>

58. Верховна Рада УРСР. (1991). Про освіту (Закон № 1060-XII). Відомості Верховної Ради УРСР, (34), ст. 451.

59. Верховна Рада Української РСР. (1959, квітень). Закон «Про зміцнення зв'язку школи з життям і про дальший розвиток системи народної освіти в Українській РСР».

60. Видра, О. (2010). Вікова та педагогічна психологія. Центр навчальної літератури.

61. Гайдей, В., & Міхно, О. (Уклад.). (2019). Метод проєктів в українській школі 1920–1930-х років (Вип. 6). Видавець ФОП Кушнір Ю. В.

62. Генденштейн, Л., & Жемчужкіна, Г. (2023). Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 27 листопада 2023 року № 1449). Міністерство освіти і науки України.

63. Гиря, О. (2019). Когнітивно-стильовий підхід як засіб диференційованого навчання учнів. Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології, (8), 43-53.

64. Года, Т. (2019). Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу [Інтерактивна вправа LearningApps]. <https://learningapps.org/view18446180>

65. Года, Т. (2022). Опитування учителів математики щодо використання сучасних засобів навчання під час вивчення змістової лінії «Функції та їх графіки» [Google Forms]. <https://forms.gle/j3tWxw5asDnUygCu5>

66. Года, Т. (2022). Особливості вивчення степеневі функції в умовах змішаного навчання. Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених (1 грудня 2022 р., м. Чернігів). Чернігів: НУЧК імені Т. Г. Шевченка.

67. Года, Т. (2023). Використання онлайн-дошок для розробки презентацій уроків з теми «Функції». Теорія і практика використання інформаційних технологій в умовах цифрової трансформації освіти: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (29 червня 2023 р., м. Київ; упоряд. І. А. Твердохліб). Київ: Вид-во УДУ імені Михайла Драгоманова.

68. Года, Т. (2023). Особливості використання сучасних технологій для вивчення тригонометричних функцій. У Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО–

2023) (6–7 квітня 2023 р., м. Черкаси). Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького.

69. Года, Т. (2023). Проведення розрахунково-графічних робіт під час вивчення показникових функцій. Актуальні проблеми теорії та методики навчання математики (до 75-річчя кафедри методики навчання математики) (6–7 жовтня 2023 р., м. Київ). Київ.

70. Года, Т. (2023). Розвиток креативного мислення під час вивчення тригонометричних функцій. Матеріалах XI Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків (11–13 травня 2023 р.). Український державний університет імені Михайла Драгоманова.

71. Года, Т. (2024). Використання штучного інтелекту при підготовці вчителя до уроків, присвячених вивченню функцій у старшій профільній школі. Актуальні питання природничо-математичної освіти, 2(24), 131–140. <https://doi.org/10.5281/zenodo.14566717>

72. Года, Т. (2025). Калькулятор Сюїта GeoGebra: Зміна степеневі функції [Відео]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=jiXg1oKlppA>

73. Года, Т. (2025). Коротка саморефлексія з теми «Тригонометричні функції» [Google форма]. <https://forms.gle/sQ3RkFZ5ZbHz4bo38>

74. Года, Т. (2025). Степенева функція Flashcard. Quizizz is now Wayground: Teacher AI and Resources. https://wayground.com/admin/flashcard/68f628c622016b124d129526?source=lesson_share

75. Года, Т., & Шкільний, О. (2021). Особливості використання сучасних технологій для навчання математики. Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця (НПК-2021): матеріали Міжнародної науково-практичної конференції (9 грудня 2021 р., м. Суми, с. 136–137). Суми: ФОП Цьома С. П.

76. Года, Т., & Школьный, О. (2022). Про доцільність і напрямки вдосконалення методики навчання учнів матеріалу змістової лінії «функції та їх графіки». Фізико-математична освіта, 35(3), 13–18. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-035-3-002>
77. Года, Т. (2024). Classtime is a solution for teachers that enhances in-class teaching through immediate feedback on every student's level of understanding. Classtime. <https://www.classtime.com/share/e6411d90-5c51-4d45-9d0f-2ff4e5b4b281?secretLink=zNODevYpzkZjuGORYCOek4>
78. Года, Т. (2026). Тригонометричні функції: Застосування в реальному житті - Mentimeter. Mentimeter. <https://www.menti.com/alpp9sdpwhj1>
79. Годованюк, Т., & Васильєва, Д. (2022). Деякі аспекти організації змішаного навчання математики в закладах середньої освіти. Український педагогічний журнал, (2), 105–115. <https://doi.org/10.32405/2411-1317-2022-2-105-115>
80. Державний стандарт базової і повної середньої освіти. (2004, 14 січня). <https://docs.google.com/document/d/1OXQ84mJre47yQil3noMwS9Y-DVFVG160/edit>
81. Друшляк, М., & Лукашова, Т. (2023). Переваги та недоліки використання ChatGPT в освітній сфері: аналіз зарубіжного досвіду. В О. С. Чашечникова (Упоряд.), Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ плюс – 2023»: матеріали IV Міжнародної дистанційної науково-методичної конференції (с. 96–98). Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка.
82. Жалдак, М., Горошко, Ю., & Вінниченко, Є. (2009). Математика з комп'ютером (2-ге вид.). НПУ імені М. П. Драгоманова.

83. Жалдак, М., Грохольська, А., & Жильцов, О. (2003). Математика (алгебра і початки аналізу) з комп'ютерною підтримкою. МАУП.
84. Жук, Ю. (2021). Засоби навчання. У Енциклопедія освіти (с. 359–360).
85. Інститут педагогіки АПН України. (2002). Концепція математичної освіти 12-річної школи (Проект). Математика в школі, (2), 12–17. (Передрук у Директор шк., ліцею, гімназії, 2004, № 1, сс. 73–75).
86. Істер, О. (2021). Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України № 795 від 12.07.2021 р.). Міністерство освіти і науки України.
87. Істер, О. (2023). Модельна навчальна програма «Математика. 7-9 класи (інтегрований курс)» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 06.09.2023 № 1090). Міністерство освіти і науки України.
88. Істер, О. (2023). Модельна навчальна програма «Алгебра. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 24.07.2023 № 883). Міністерство освіти і науки України.
89. Істер, О. (2023). Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 24.07.2023 № 883). Міністерство освіти і науки України.
90. Кабінет Міністрів України. (2000, November 16). Постанова № 1717. В Міністерство освіти і науки України (Упоряд.), Освіта України: нормативно-правові документи: До II Всеукраїнського з'їзду працівників освіти (сс. 161–163). Київ.

91. Кабінет Міністрів України. (2004, 14 січня). Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти : Постанова № 24 // База даних «Законодавство України». URL: <https://zakon.rada.gov.ua/go/24-2004-%D0%BF>

92. Кабінет Міністрів України. (2011, 23 листопада). Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти України. Постанова № 1392-р. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/go/1392-2011-%D0%BF>

93. Кабінет Міністрів України. (2016, 14 грудня). Про схвалення Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року (Розпорядження № 988-р).

94. Кабінет Міністрів України. (2018, 21 лютого). Про затвердження Державного стандарту початкової освіти: Постанова № 87. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/go/87-2018-%D0%BF>

95. Кабінет Міністрів України. (2020, 30 вересня). Державний стандарт базової середньої освіти (Постанова № 898). Урядовий портал. <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnogo-standartu-bazovoyi-serednoyi-osviti-898-300920>

96. Кабінет Міністрів України. (2024). Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти : Постанова № 851 від 25 липня 2024 р. Законодавство України. <https://zakon.rada.gov.ua/go/851-2024-%D0%BF>

97. Кабінет Міністрів України. (1993, 3 листопада). Про Державну національну програму «Освіта» («Україна XXI століття») (Постанова № 896). Київ.

98. Каніщев, О., Берегова, М., & Дементьєв, І. (2025). Вплив педагогічних підходів та технологій у дистанційному навчанні. Академічні візії, (43).

99. Кірман, В. (2010). Методична система вивчення функцій в класах фізико-математичного профілю [Неопублікований автореферат дисертації].
100. Колмогоров, А., Абрамов, О., Дудніцин, Ю., Івлєв, Б., & Шварцбурд, С. (1987). Алгебра і початки аналізу: Підручник для 9–10 класів середньої школи. Радянська школа.
101. Колмогоров, А., Вейц, Б., Демидов, И., Ивашев-Мусатов, О., & Шварцбурд, С. (1976). Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9 класса средней школы (2-е изд.). Просвещение.
102. Колмогоров, А., Ивашев-Мусатов, О., Ивлєв, Б., & Шварцбурд, С. (1976). Алгебра и начала анализа, 10 кл. (3-тє вид.). Просвещение.
103. Концепція «Нова українська школа». (2016). Міністерство освіти і науки України. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>
104. Лебедик, Л., Стрельніков, В., & Стрельніков, М. (2020). Сучасні технології навчання і методики викладання дисциплін. ТОВ «АСМІ».
105. Левашова, В. (2008). Міжпредметні зв'язки природничих дисциплін як засіб формування наукового світогляду школярів. Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди.
106. Левицький, В., & Огоновський, П. (1905). Алгебра для середніх шкіл. Накладом Наукового Товариства імені Шевченка.
107. Лиховид, І. (2023, 5 грудня). PISA-2022: Короткий огляд усіх основних результатів. Нова українська школа | Веб-ресурс НУШ. <https://nus.org.ua/2023/12/05/pisa-2022-korotkyj-oglyad-usih-osnovnyh-rezultativ/>

108. Лобода, Ю. (2012). Електронні засоби навчання: структура, зміст, класифікація. *Information Technologies and Learning Tools*, 28(2). <https://doi.org/10.33407/itlt.v28i2.649>

109. Лов'янова, І. (2016). Методика навчання математики у запитаннях і відповідях: Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Криворізький державний педагогічний університет.

110. Лов'янова, І. (2022). Методика навчання математики у запитаннях і відповідях: Навчальний посібник для підготовки студентів до атестації здобувачів вищої освіти. Базовий рівень підготовки (3-тє вид.). Криворізький державний педагогічний університет.

111. Лук'янова, С., & Філон, Л. (2023). Внутрішньопредметні зв'язки як засіб подолання освітніх втрат учнівства з математики. *Grail of Science*, (33), 335–341. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.10.11.2023.53>

112. Макаричев, Ю., Миндюк, Н., Монахов, В., Муравін, К., & Суворова, С. (1973). Алгебра: Пробний підручник для 8 класу. Радянська школа.

113. Мала академія наук України. (б. д.). Як штучний інтелект змінює шкільну освіту: результати дослідження Малої академії наук і Projector Institute. JAS.Ukraine. <https://man.gov.ua/about/news/yak-shtuchnij-intelekt-zminyuye-shkilsnu-osvitu-rezulstati-doslidzhennya-maloyi-akademiyi-nauk-i-projector-institute>

114. Маркушевич, О. (Ред.). (1971). Алгебра: підручник для 6-го класу. К.: Радянська школа.

115. Мерзляк, А., & Якір, М. (2024). Алгебра: підручник для 7 класу закладів загальної середньої освіти. Гімназія.

116. Мерзляк, А., Номіровський, Д., & Полонський, В. (2019). Математика: Алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту. Гімназія.

117. Мерзляк, А., Номіровський, Д., Пихтар, М., Рубльов, Б., Семенов, В., & Якір, М. (2021). Модельна навчальна програма «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 12.07.2021 № 795, у редакції наказу Міністерства освіти і науки України від 09.02.2022 № 143). Міністерство освіти і науки України.

118. Мерзляк, А., Номіровський, Д., Пихтар, М., Рубльов, Б., Семенов, В., & Якір, М. (2021). Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України № 795 від 12.07.2021 р.). Міністерство освіти і науки України.

119. Мерзляк, А., Номіровський, Д., Пихтар, М., Рубльов, Б., Семенов, В., & Якір, М. (2021). Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 12.07.2021 № 795, у редакції наказу Міністерства освіти і науки України від 09.02.2022 № 143). Міністерство освіти і науки України.

120. Мерзляк, А., Номіровський, Д., Полонський, В., & Якір, М. (2018). Алгебра і початки аналізу: Профільний рівень: Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Гімназія.

121. Михаліна, Г., & Деканов, С. (2010). Вивчення основних елементарних функцій дійсної і комплексної змінної з використанням комп'ютерних засобів математики. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання, (9), 49–71.

122. Міністерство народної освіти УРСР. (1989). Програми з математики для 5–11 класів середньої загальноосвітньої школи. Радянська школа.

123. Міністерство народної освіти УРСР. (1991). Програми середньої загальноосвітньої школи. Математика: 5–11 класи. Радянська школа.

124. Міністерство освіти і науки України. (2004). Навчальні програми для 5-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. Верховна Рада України. <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v-129290-05#Text>

125. Міністерство освіти і науки України. (2005). Математика: Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. 5–12 класи. Перун.

126. Міністерство освіти і науки України. (2011). Навчальні програми для 10–11 класів. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

127. Міністерство освіти і науки України. (2020). Державний стандарт базової середньої освіти. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/nova-ukrainska-shkola-2/derzhavniy-standart-bazovoi-serednoi-osviti>

128. Міністерство освіти і науки України. (2024). Модельні навчальні програми для 10-12 класів Нової української школи (профільна школа з 2027 року). <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/modelni-navchalni-prohramy-dlia-10-12-klasiv-novoi-ukrainskoi-shkoly-profilna-shkola-z-2027-roku>

129. Міністерство освіти й науки УРСР. (1982). Програма з математики для середньої школи на 1982/83 навчальний рік. 4–10 класи. Київ: Радянська школа.

130. Міністерство освіти України. (1996). Програми для середніх загальноосвітніх шкіл. Математика, 5–11 класи. Київ: Перун.

131. Міністерство освіти Української РСР. (1982). Програма з математики для середньої загальноосвітньої школи на 1982/83 навчальний рік: 4–10 кл. Радянська школа.

132. Міністерство освіти Української РСР. (1982). Програма з математики для середньої загальноосвітньої школи на 1982/83 навчальний рік: 4–10 кл. Радянська школа.
133. Міністерство освіти УРСР. (1975). Програми середньої школи на 1975/76 навчальний рік: Математика (9–10 класи). Радянська школа.
134. Моляко, В., Гулько, Ю., & Ваганова, Н. (2024). Функціонування творчого мислення в умовах інформаційної невизначеності. Інститут психології імені Г. С. Костюка НАПН України.
135. Наконечна, М. (2018). Просоціальна активність особистості в контексті культурно-історичної психології Л. С. Виготського. Психологія людини: Л. С. Виготський та сучасна наука, (1), 41–60.
136. Нелін, Є. (2018). Алгебра і початки математичного аналізу (профільний рівень): Підручник для 10 класу закладів середньої освіти. Ранок.
137. Нелін, Є., Школьний, О., Милянник, А., Простакова, Ю., & Васишин, М. (2026). Модельна навчальна програма навчального предмета «Математика. 10–12 класи. Основний рівень» для закладів загальної середньої освіти. Міністерство освіти і науки України.
138. Панченко, С. (2023). Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України від 06.09.2023 № 1090). Міністерство освіти і науки України.
139. Радченко, С., & Зайцева, К. (2021). Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти (затверджено наказом Міністерства освіти і науки України № 795 від 12.07.2021 р.). Міністерство освіти і науки України.
140. Скворцова, С., & Тарасенкова, Н. (2021). Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти

(затверджено наказом МОН України № 795 від 12.07.2021 р.). Міністерство освіти і науки України.

141. Слєпкань, З. (2004). Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Підручники і посібники.

142. Слєпкань, З. (2006). Методика навчання математики (2-ге вид.). Вища школа.

143. Соколенко, Л. (2017). Методичні особливості навчання властивостей елементарних функцій курсу математики старшої школи. НПУ імені М. П. Драгоманова (с. 211–212).

144. Соколенко, Л. (2018). Методика навчання наукових основ функціональної змістової лінії майбутніх учителів математики. Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Серія: Педагогічні науки, (12).
<https://ped-ejournal.cdu.edu.ua/article/view/2152>

145. Соколенко, Л., & Швець, В. (2013). Особливості системи прикладних задач, призначених для вивчення функцій у курсі алгебри і початків аналізу.

146. Соколенко, Л., Філон, Л., & Швець, В. (2010). Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. НПУ імені М. П. Драгоманова.

147. Столярчук, О. (2022). Навчання та психоемоційний стан українських підлітків в умовах війни в Україні. Науковий вісник Ужгородського національного університету. Серія: Психологія, (1), 115–120. <https://doi.org/10.32782/psy-visnyk/2022.1.22>

148. Стрілецька, Н. (2012). Концептуальні засади шкільної математичної освіти в Наддніпрянській Україні (кінець XIX – початок XX ст.). Рідна школа, (8–9), 64–70. http://nbuv.gov.ua/UJRN/rsh_2012_8-9_16

149. Тарасенкова, Н. (2016). Компетентнісний підхід у навчанні математики: теоретичний аспект. Математика в рідній школі, 11(179), 26-30.
150. Ткач, Ю. (2011). Математика. Задачі економічного змісту в математиці. Ранок.
151. Український центр оцінювання якості освіти. (2016). Офіційний звіт про проведення ЗНО в 2016 році (Том 1; Том 2). УЦОЯО. <https://testportal.gov.ua/ofzvrit/>
152. Український центр оцінювання якості освіти. (2017). Звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання 2017 року. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/01/zvit_2017.pdf
153. Український центр оцінювання якості освіти. (2018). Офіційний звіт про проведення в 2018 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти (Том 1). Київ: УЦОЯО. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2018/08/ZVIT-ZNO_2018-Tom_1.pdf
154. Український центр оцінювання якості освіти. (2019). PISA-2018: Національний звіт. УЦОЯО. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf
155. Український центр оцінювання якості освіти. (2019). Офіційний звіт про проведення в 2019 році ЗНО. Київ: УЦОЯО. <https://testportal.gov.ua/14477/>
156. Український центр оцінювання якості освіти. (2020). Офіційний звіт про результати ЗНО 2020 року. Київ: УЦОЯО. <https://testportal.gov.ua/rezultaty-zno-2020-novatsiyi-zno-2021/>
157. Український центр оцінювання якості освіти. (2021). Звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання А2021 року. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/zvit_2021.pdf

158. Український центр оцінювання якості освіти. (2023). Офіційний звіт про результати НМТ у 2023 році (Том 2). https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2023/08/ZVIT-NMT_2023-Tom_2.pdf

159. Український центр оцінювання якості освіти. (2024). Офіційний звіт про результати НМТ у 2024 році. Том I [PDF]. https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2024/10/Zvit_NMT_2024_Tom_I_gotovyj_onovlenyj.pdf

160. Центральний Комітет Компартії України та Рада Міністрів Української РСР. (1984, 10 липня). Про даліше вдосконалення загальної середньої освіти молоді і поліпшення умов роботи загальноосвітньої школи (Постанова № 281). Київ.

161. Центральний Комітет Комуністичної партії України. (1959, 25 липня). Про стан і заходи далішого розвитку педагогічної науки в Україні [Постанова].

162. Центральний Комітет КП України та Рада Міністрів Української РСР. (1966, 8 грудня). Про заходи далішого поліпшення роботи середньої загальноосвітньої школи в Українській РСР (Постанова № 900). Київ.

163. ЦК КП України & Рада Міністрів УРСР. (1972, 7 липня). Про заходи по виконанню постанов ЦК КПРС і Ради Міністрів СРСР № 463 від 20 червня 1972 р. «Про завершення переходу до загальної середньої освіти молоді та даліший розвиток загальноосвітньої школи» (Постанова № 326).

164. Швець, В. О. (2024). Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі: курс лекцій. Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова.

165. Шищенко, І. (2022). Деякі аспекти впливу цифрових технологій на освітній процес закладів вищої освіти: огляд проблем та викликів. *Освіта. Інноватика. Практика*, 10(5), 42–47. <https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol10i5-006>

166. Шкіль, М., & Хмара, Т. (2000). Алгебра і початки аналізу: Підручник для учнів 10 класу з поглибленим вивченням математики в середніх навчальних закладах освіти. Освіта.
167. Шкіль, М., Колесник, Т., & Хмара, Т. (1992). До концепції побудови підручника з курсу алгебри та початків аналізу для класів фізико-математичного профілю. Методика викладання математики і фізики, (8), 3–9.
168. Шкіль, М., Слєпкань, З., & Дубинчук, О. (1998). Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Зодіак-ЕКО.
169. Шкіль, М., Слєпкань, З., & Дубинчук, О. (2001). Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Київ: Освіта.
170. Шкіль, М., Слєпкань, З., & Дубинчук, О. (2002). Алгебра і початки аналізу. 11 клас. Київ: Освіта.
171. Шкіль, М., Слєпкань, З., & Дубинчук, О. (2003). Алгебра і початки аналізу: Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Зодіак-ЕКО.
172. Шкіль, М., Слєпкань, З., & Дубинчук, О. (1999). Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Зодіак-ЕКО.
173. Шкільний, О., Нелін, Є., Меляник, А., & Простакова, Ю. (2024). Математика: 7 клас (Т. 1). Ранок.
174. Шунда, Н. (1996). Формування знань про елементарні функції у професійній підготовці вчителя математики [Неопубл. автореф.]. УДПУ.
175. Ямшинська, Н., & Невкіпілова, О. (2019). Освітній процес у контексті ідей конструктивізму. Інноваційна педагогіка, 11(2), 191–195.
176. Яшанов, С., & Назаренко, В. (2025). Цифрові технології в системі технологічної освіти. В Д. Кільдеров & В. Харламенко (Ред.), Технологічна освіта: сучасні реалії та перспективи розвитку: тези доповідей XIV Міжнародної науково-практичної конференції (с. 409–415). Український державний університет імені Михайла Драгоманова.

Додатки

Додаток А

МОДЕЛЬ: «Індивідуальні траєкторії» (гнучка модель)

Для учнів зі значними освітніми втратами. Приклад для одного учня.

АСИНХРОННА ЧАСТИНА

Персональний навчальний план (ПНП)

Етап 1: Діагностика (тест 30 хв): виявлення конкретних прогалин, автоматичне формування ПНП

Приклад ПНП для учня:

Прогалини: визначаємо які теми пропустив учень, який матеріал потрібно закріпити.

Індивідуальний план:

Розробляємо детальний план подолання освітніх втрат (готуємо відео, тренажери, завдання, рефлексію).

Створюємо простір у якому вчитель буде підтримувати учня: відеоінструкції спеціально для ПНП; щоденні короткі завдання (10-15 хв); можливість перездачі тестів; персональний фідбек від вчителя (2 рази на тиждень).

СИНХРОННА ЧАСТИНА

Варіант 1: Окремі консультації

- 2 рази на тиждень по 20 хв (онлайн або офлайн).
- Індивідуальна або в малій групі (2-3 учні з подібними труднощами).
- Розбір складних моментів.

Варіант 2: Інтеграція в загальний урок

- Учень поступово приєднується до групової роботи.
- Спочатку як спостерігач.
- Потім як активний учасник.
- Підтримка від peer-tutors.

Уточнення: діагностика (початок роботи) .

Учень проходить спеціальний тест (30 хвилин) у Google Forms або іншій платформі.

Приклад питань у тесті:

Блок 1: Базові степені (3 питання)

1. Обчисліть: $2^3 = ?$
2. Спростіть: $x^2 \cdot x^3 = ?$
3. Що таке x^0 ?

Блок 2: Функції (3 питання)

1. Що таке область визначення?
2. Побудуйте графік $y = x^2$.
3. Як визначити зростання функції?

Блок 3: Степенева функція (3 питання)

1. Обчисліть значення $y = x^2$ при $x = 3$.
2. Який графік має функція $y = x^3$?
3. Які властивості має $y = x^2$?

Результат діагностики:

Після короткого тестування (наведені питання є лише прикладом, цей тест можна розширити на розсуд вчителя), можемо одразу визначити які теми учень засвоїв, які прогалини присутні та для яких тем варто провести закріплення знань.

ПРИКЛАД: Учень Іван

Результати тесту Івана:

Тема	Результат у %	Результат
Обчислення x^a	80	Знає
Властивості степенів	30	Не знає
Побудова графіків	20	Не знає

Читання графіків	60	Частково засвоєно
------------------	----	-------------------

Висновок: у Івана 2 критичні прогалини: властивості степенів та графіки.

Саме їх треба закрити в першу чергу.

КРОК 2: ПЕРСОНАЛЬНИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ПЛАН (ПНП)

На основі результатів тесту формуємо індивідуальний план для Івана:

ТИЖДЕНЬ 1: Закриваємо прогалину #1

Ціль: Вивчити властивості степенів

Асинхронна робота (вдома):

День	Завдання
Понеділок	- Відео 1: «Множення степенів» (10 хв) - Тренажер: 10 завдань типу $x^2 \cdot x^3 = ?$ - Мінітест (5 питань)
Вівторок	- Відео 2: «Ділення степенів» (10 хв) - Тренажер: 10 завдань типу $x^5 : x^2 = ?$ - Мінітест (5 питань)
Середа	- Відео 3: «Степінь степеня» (10 хв) - Тренажер: 10 завдань типу $(x^2)^3 = ?$ - Мінітест (5 питань)
Четвер-п'ятниця	- Повторення та закріплення - Підсумковий тест із теми

Коментар: завдання мають займати не багато часу (10-15 хв/день), мають містити автоматичну перевірку та можливість перездачі завдань до моменту отримання бажаного результату.

ТИЖДЕНЬ 2: Закриваємо прогалину #2

Ціль: Навчитися будувати графіки

День	Завдання
Понеділок-вівторок	- Відео 1-2: «Графік $y = x^2$» (8 хв кожне) - GeoGebra: побудувати 2 графіки квадратичних функцій - На папері: накреслити 3 графіки
Середа-четвер	- Відео 3-4: «Графік $y = x^3$ та інші» (8 хв кожне) - GeoGebra: ще 3 графіки - На папері: ще 7 графіків різних функцій
П'ятниця	Підсумкова практика: побудувати 5 графіків самостійно

ТИЖДЕНЬ 3: Повернення до класу

Ціль: Інтеграція з основним курсом

День	Завдання
Понеділок-середа	- Продовжує виконувати полегшені завдання вдома - Починає спостерігати на загальних уроках - Не виконує завдання з усіма, просто дивиться і слухає
Четвер-п'ятниця	- Починає виконувати деякі завдання разом з групою Б (середній рівень) - Отримує підтримку від peer-tutor (однокласника-помічника)

Результат: Іван наздоганяє групу Б і може продовжувати навчання разом з класом!

СИНХРОННА ЧАСТИНА (живі заняття)

Варіант 1: Окремі консультації

Наш учень Іван зустрічається із вчителем 2 рази на тиждень, по 20 хв в форматі офлайн/онлайн. Вчитель перевіряє, що учень зробив вдома (5 хв),

розбирають складні моменти разом (10 хв) та відповідає на питання Івана (5 хв). Можливий формат мікрогрупи (3-4 учні), якщо в класі є учні які мають такі ж прогалини.

Варіант 2: Поступове входження в урок

Тиждень	Завдання
1	Іван сидить на загальному уроці, але: - НЕ виконує завдання разом з усіма. - Спостерігає, як працюють інші. - Слухає пояснення вчителя. - Робить нотатки.
2	Іван починає частково брати участь: - Виконує полегшені версії завдань. - Працює в парі з peer-tutor (помічником-однокласником). - Відповідає на прості питання.
3	Іван повністю інтегрований: - Працює разом з групою Б. - Виконує ті ж завдання (можливо, трохи простіші). - Самостійно, але може попросити допомоги.

Коментар: Peer-tutor - однокласник-помічник. Тобто учень який добре знає тему та може пояснити теми іншим. Він сидить разом з Іваном на уроках, пояснює незрозумілі моменти, допомагає виконувати завдання.

Користь від такого навчання отримують одразу 2 учні, адже один отримує допомогу від ровесника (який може пояснити зрозуміліше, ніж вчитель), а Peer-tutor сам краще розуміє тему (навчаючи інших, вчишся сам).

ПІДТРИМКА ПРОТЯГОМ УСЬОГО ПРОЦЕСУ

1. Відеоінструкції спеціально для ПНП

Короткі відео (5-10 хв), записані спеціально для учнів з прогалинами:
повільний темп пояснення, більше прикладів; покрокові інструкції.

Приклад структури відео:

0:00-1:00 - Що сьогодні вивчатимемо.

1:00-4:00 - Пояснення теорії (повільно).

4:00-7:00 - Приклад №1 (детально).

7:00-9:00 - Приклад №2 (детально)

9:00-10:00 - Що запам'ятати.

2. Щоденні короткі завдання.

Кожного дня Іван отримує в Google Classroom маленьке завдання (10-15 хв):

Понеділок: 5 прикладів на множення степенів.

Вівторок: 5 прикладів на ділення степенів.

Середа: Тест з 10 питань.

Четвер: Побудувати 2 графіки.

П'ятниця: Змішані завдання (повторення).

Коментар: такий формат допомагає сформувати звичку навчатися, не перевантажує та є систематичним.

3. Можливість перездачі тестів

Нашою метою є досягти розуміння та засвоїти тему, тому учень може ще раз опрацювати матеріал та перездати тест.

4. Персональний фідбек від вчителя

Наприклад, учень може отримати ось такий коментар від вчителя:

Іване, молодець!

Бачу, що множення степенів ти вже розумієш добре. Але в діленні ще плутаєшся з від'ємними показниками. Переглянь відео №2 з 5:00 до 7:30 ще раз. І розв'яжи ці 5 прикладів: [посилання]

Віримо в тебе!

Учень розуміє, що ще варто допрацювати, отримує відгук та підтримку від вчителя.

ПРИКЛАД: ЯК ЦЕ ВИГЛЯДАЄ НА ПРАКТИЦІ

Історія Івана (3 тижні)

Стартова ситуація:

- Іван пропустив 2 тижні через хворобу.
- Клас уже вивчив властивості степеневі функції.
- Іван відстав і не розуміє нічого.

Тиждень 1:

- Понеділок: Проходить діагностичний тест → виявлено 2 прогалини.
- Вт-Пт: Дивиться відео вдома, робить завдання по 15 хв/день.
- Вівторок 14:00: Перша консультація з вчителем (20 хв).
- П'ятниця 15:00: Друга консультація (20 хв).
- Результат: Закрив прогалину «Властивості степенів» на 70%.

Тиждень 2:

- Пн-Пт: Вивчає побудову графіків (відео + GeoGebra)
- Консультації: 2 рази по 20 хв
- Урок (середа): Сидить в класі як спостерігач, робить нотатки
- Результат: Навчився будувати основні графіки

Тиждень 3:

- Понеділок: Приходить на урок, працює з реер-tutor Максимом
- Середа: Виконує полегшені завдання разом з групою Б
- П'ятниця: Пише той самий тест, що й група Б → отримує 7 балів!
- Результат: Повністю інтегрований у клас, може вчитися далі

Перевагами такої моделі є:

- Робота у власному темпі.
- Усунення прогалин знань.
- Прогрес та персональна підтримка.
- Вчитель знає які прогалини має учень

- Тести з автоматичною перевіркою зменшують час підготовки до уроків для вчителя.
- Учні в класі можуть розвивати свої навички комунікації та спробувати себе в ролі Peer-tutors.

Відповіді на типові питання:

Питання 1: А якщо в учня 5 прогалин?

Відповідь: План буде довшим (4-5 тижнів). Важливо закривати по черзі, а не все одразу.

Питання 2: А якщо учень не виконує завдання вдома?

Відповідь: Система показує це вчителю → дзвінок батькам → додаткова мотивація. Можна частину завдань робити в школі (продовжений день).

Питання 3: Скільки учнів можуть бути на ПНП одночасно?

Відповідь: Оптимально 3-5 учнів. Якщо більше → групувати за подібними прогалинами.

Додаток Б

ВИТЯГ З ПРОТОКОЛУ № 7

засідання циклової комісії математичних дисциплін
Київського фахового коледжу комп'ютерних технологій та економіки Державного
некомерційного підприємства «Державний університет
«Київський авіаційний інститут»

від 18 лютого 2025 року

Усього членів циклової комісії: 9 осіб.

ПРИСУТНІ: Чуйков А.С., Скриннік Ю.Б., Савіна Л.П., Колесникова Г.П., Сукач Т.М.,
Курінна Т.В., Шевченко О.А., Года Т.Ю. Гурківська Т.С.).

Порядок денний:

1. Задачі підвищеної складності у завданнях НМТ.
2. Результати профорієнтаційної роботи у 2024/2025 н.р.
3. Обговорення плану відкритого уроку викладача Скринніка Ю.Б.
4. Підсумки другої рубіжної атестації.
5. Доповідь «Як штучний інтелект може змінити викладання».
6. Затвердження Положення про організацію та проведення вступних випробувань у формі усної індивідуальної співбесіди з математики.

СЛУХАЛИ: Году Т.Ю. - викладача математики з доповіддю на тему «Classtime», використання в навчальному процесі. Года Т.С. показала методику використання платформи «Classtime». Продемонструвала тестові завдання на цій платформі.

УХВАЛИЛИ:

Доповідь Годи Т.С. прийняти до відома, а членам циклової комісії опанувати методику використання «Classtime» для застосування в навчальному процесі

Голова ЦК



Лариса САВІНА

Додаток В

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження

Годи Тетяни Юріївни

«Методика використання сучасних засобів навчання при вивченні змістової лінії

«Функції» учнями ліцею»

на здобуття наукового ступеня доктора філософії

зі спеціальності 014 Середня освіта

Результати дисертаційного дослідження Тетяни ГОДИ «Методика використання сучасних засобів навчання при вивченні змістової лінії «Функції» учнями ліцею» впроваджуються в ліцеї №190 Деснянського району міста Києва з 2021 року.

Вчителями школи при підготовці та під час проведення уроків використовуються методичні розробки та статті з методичними рекомендаціями у фахових науково-педагогічних виданнях, авторкою яких є Тетяни ГОДА.

Починаючи з 2019 навчального року, Тетяна ГОДА є вчителем математики в ліцеї №190 Деснянського району міста Києва. Нею було розроблено семінар для вчителів математики «Інновації в методиці застосування сучасних засобів навчання». Вчителі математики вищої, першої та другої категорій, що були слухачами даного семінару, відзначили слушність та користь запропонованих інновацій, про що свідчать їх позитивні відзиви та жвава дискусія під час проведення семінару. Запропонована методика та її застосування одержали високу оцінку фахівців-педагогів.

Учні ліцею на уроках з алгебри виражають зацікавленість у вивченні предмету, вважають використання сучасних засобів навчання корисними під час уроків та в процесі самостійної підготовки. Про це свідчать результати опитування учнів.

Директор

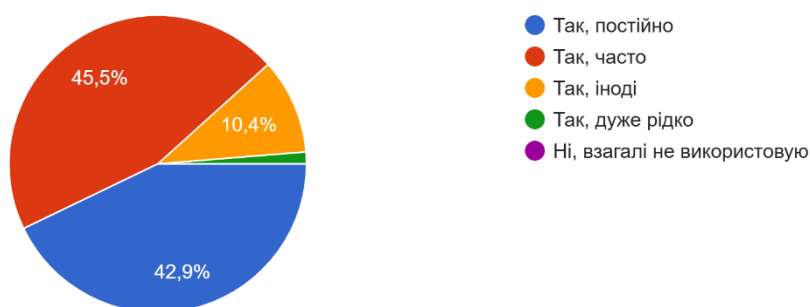


Микола МАРТИНЕЦЬ

Додаток Г

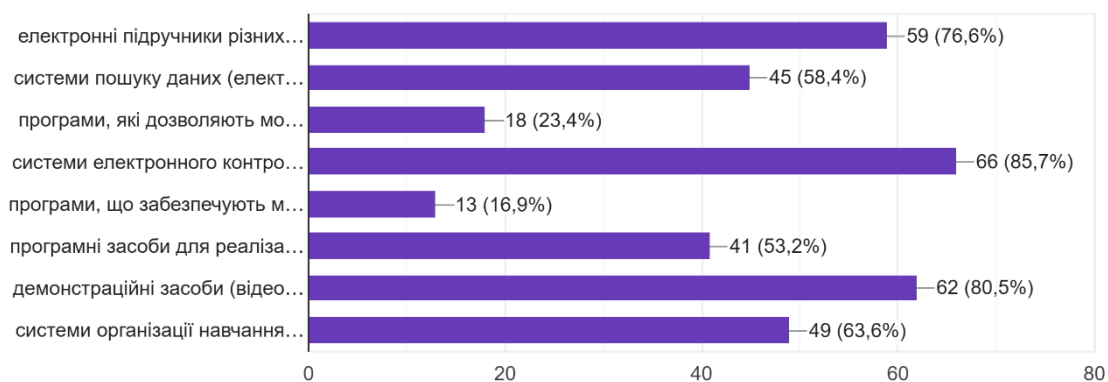
1. Чи використовуєте Ви в своїй професійній діяльності сучасні інформаційно-комунікаційні технології?

77 відповідей

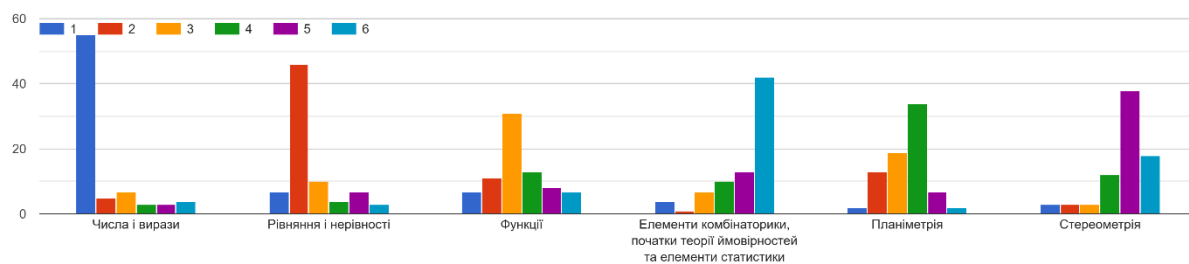


2. Які програмні (електронні) засоби Ви використовуєте для навчання учнів? (можна обрати кілька варіантів відповідей, а також навести свій варіант)

77 відповідей

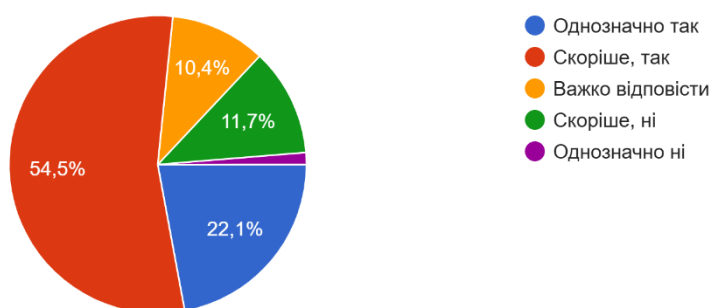


3. Впорядкуйте за важливістю (1- найбільш, на Вашу думку, важлива, 6-найменш важлива) наступні змістові лінії шкільного курсу математики.



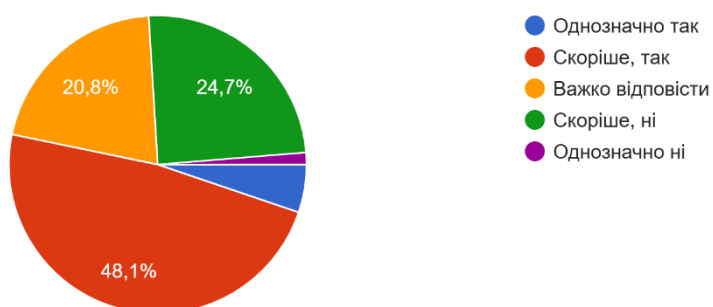
4. Чи вбачаєте Ви доцільним вдосконалення методики навчання учнів матеріали змістової лінії «Функції»?

77 відповідей



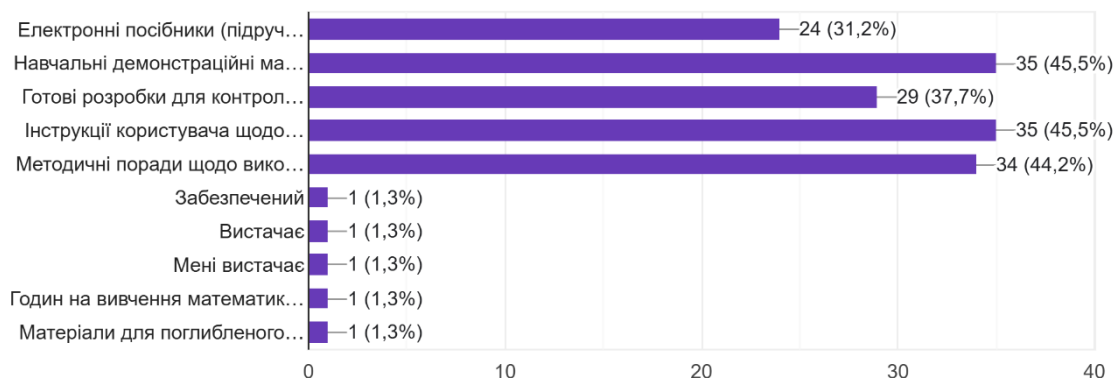
5. Чи забезпечені Ви наразі належними методичними матеріалами для навчання учнів матеріалу змістової лінії «Функції» .

77 відповідей



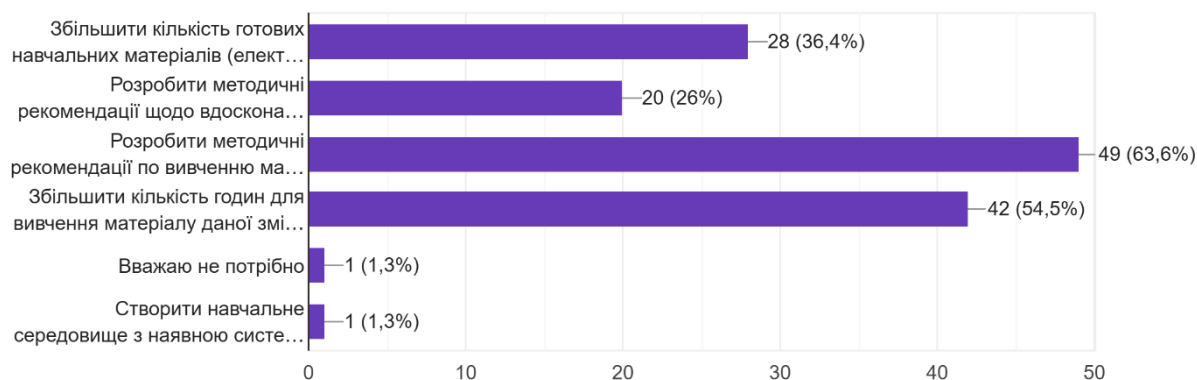
6. Якщо Вам не вистачає методичних матеріалів для навчання учнів матеріалу змістової лінії "Функції", то яких саме? (можна обрати кілька в...антів відповідей, а також навести свій варіант)

77 відповідей



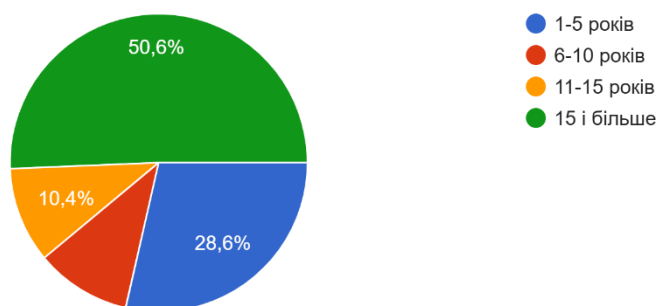
7. Якщо Ви вважаєте, що потрібно вдосконалити методику навчання учнів матеріалу змістової лінії «Функції», то що для цього можн...тів відповідей, також додати власні пропозиції)

77 відповідей



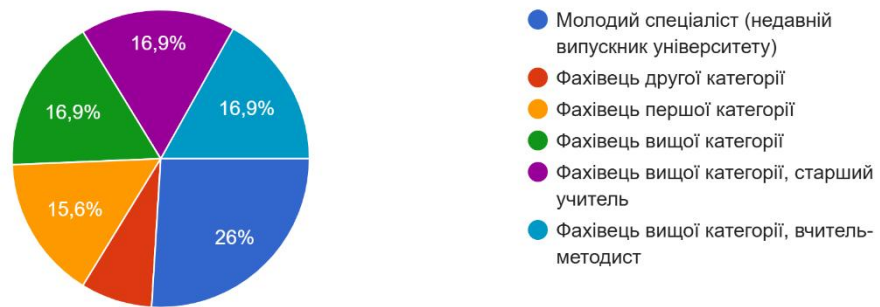
8. Укажіть Ваш стаж роботи вчителем.

77 відповідей



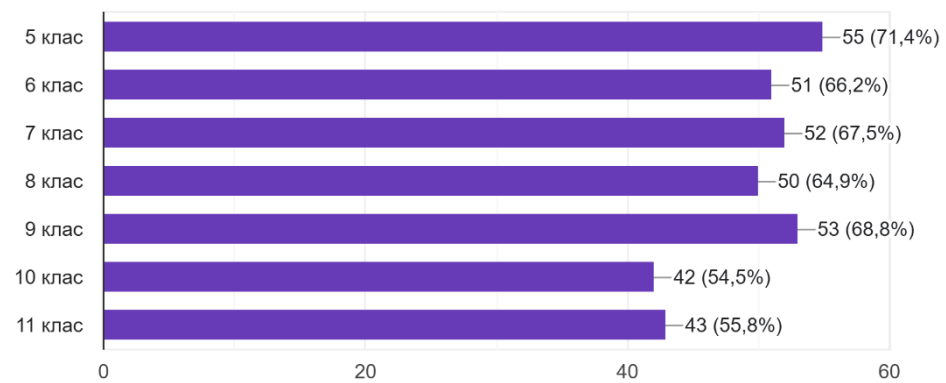
9. Укажіть Вашу кваліфікаційну категорію та звання (за наявності)

77 відповідей



10. Укажіть класи, в яких Ви працюєте чи раніше працювали? (можна обрати кілька варіантів відповідей)

77 відповідей



Додаток Д

Варіант 1

1. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3 - 2x$ на відрізьку $[1; 4]$.

2. Визначте, чи є функція парною, непарною чи ні:

а) $y = x^2 - 5$

б) $y = 3x^3$

3. Запишіть у вигляді степеня з раціональним показником:

а) $\sqrt{x}$

б) $\sqrt[3]{x^2}$

4. Доведіть, що функція $f(x) = x^4 - x^2$ є парною.

5. Обчисліть: $16^{\frac{3}{4}}$

6. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{2x + 3} = 5$$

7. Спростіть вираз:

$$\frac{\sqrt[3]{16x^4}}{2^3\sqrt{2x}}$$

8. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на відрізьку $[-2; 2]$:

$$f(x) = 2x^3 - 3x$$

9. Дослідіть функцію $y = x^{-1} + 2x^2$:

а) область визначення;

б) нулі;

в) поведінка при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$.

10. Спростіть вираз:

$$\sqrt[4]{81x^6} : \sqrt{x}$$

11. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x + 4} + x = 6$$

12. Ціна товару залежить від кількості і описується функцією

$$P(x) = 100 - 2\sqrt{x}$$

- а) знайдіть область визначення;
- б) знайдіть найбільше і найменше значення на $[0; 25]$;
- в) поясніть, чи реалістична модель при $x > 2500$.

Варіант 2

1. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = 5 - 3x$ на відрізку $[0; 3]$.
2. Визначте, чи є функція парною, непарною чи ні:
 - а) $y = x^2 + 4$
 - б) $y = -2x^3$
3. Запишіть у вигляді степеня з раціональним показником:
 - а) $\sqrt[3]{x}$
 - б) $\sqrt[4]{x^3}$
4. Доведіть, що функція $f(x) = x^6 - 2x^4$ є парною.
5. Обчисліть: $81^{\frac{1}{4}}$
6. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{3x - 2} = 4$$
7. Спростіть вираз:

$$\frac{\sqrt[3]{54x^5}}{3\sqrt[3]{2x}}$$
8. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на відрізку $[-1; 2]$:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$
9. Дослідіть функцію $y = x^{-1} - x^2$:
 - а) область визначення;
 - б) нулі функції;
 - в) поведінка при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$.
10. Спростіть вираз:

$$\frac{\sqrt[4]{16x^8}}{\sqrt{x^2}}$$

11. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{2x + 5} + x = 7$$

12. Ціна товару залежить від кількості й описується функцією

$$P(x) = 150 - 3\sqrt{x},$$

де x – кількість одиниць товару.

- а) знайдіть область визначення функції;
- б) знайдіть найбільше і найменше значення ціни на відрізку $[0; 36]$;
- в) поясніть, чи є реалістичною така модель для дуже великих значень x (наприклад, $x > 10\,000$).

Додаток Е

Зміст та вимоги до знань учнів зі змістової лінії «Функції» (КМУ, 2004)

Зміст освіти	Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів
Основна школа	
Функції. Лінійна, обернена пропорційність, квадратична функція. Числові послідовності	Уявлення про координатну пряму і координатну площину, про функціональну залежність між змінними. Знання основних відомостей про способи задання функцій та числових послідовностей, про зазначені у змісті види функцій, про арифметичну та геометричну прогресії. Уміння будувати графіки і за їх допомогою характеризувати властивості функцій
Старша школа	
Числова функція Тригонометричні, степеневі, показникові, логарифмічні функції. Неперервність функції. Похідна та інтеграл. Застосування похідної і визначеного інтеграла	Уявлення про функцію як математичну модель залежності між змінними будь-якої природи; про неперервність функції. Знання про зазначені в змісті види функцій; основних відомостей про похідну та інтеграл; формул похідних основних функцій. Уміння будувати графіки функцій, характеризувати за графіками їх властивості; знаходити похідні, інтеграли; застосовувати похідну та визначений інтеграл до розв'язування задач прикладного змісту

Додаток Ж

Зміст та вимоги до знань учнів зі змістової лінії «Функції» (КМУ, 2011)

Освітня галузь «Математика»	
Основна школа	
Функція. Лінійна функція. Обернена пропорційність. Квадратична функція. Числові послідовності	Знати і розуміти, що таке координатна пряма і координатна площина, означення функціональної залежності між змінними, способи завдання функції, означення та властивості лінійної, квадратичної функцій, функції оберненої пропорційності, функції числової послідовності, арифметичної та геометричної прогресій. Уміти визначати координати точки на площині, будувати точки за заданими їх координатами, будувати та аналізувати графіки функцій, зокрема лінійної, квадратичної функцій, функції оберненої пропорційності, розв'язувати задачі із застосуванням формул загального члена та суми перших членів прогресії, застосовувати функціональні залежності для створення математичних моделей реальних процесів та явищ.
Старша школа	
Властивості функцій. Степенева, тригонометричні, показникова та логарифмічна функції. Похідна.	Знати і розуміти означення характерних властивостей функцій (зростання, спадання, парність тощо), означення та властивості степеневі, тригонометричної, показникової та логарифмічної функцій, зміст поняття

Інтеграл	неперервної функції, диференційованої функції, означення та властивості похідної та первісної. Уміти будувати та аналізувати графіки функцій, зокрема степеневі, тригонометричної, показникової та логарифмічної функцій, знаходити похідні та первісні деяких функцій, застосовувати похідну для встановлення властивостей функцій та побудови їх графіків, первісну та інтеграл — для обчислення площ і геометричних фігур.
----------	---

Додаток И

Відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти (затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898) ціннісними орієнтирами концепції Нової української школи є (КМУ, 2020):

- повага до особистості учня та визнання пріоритету його інтересів, досвіду, власного вибору, прагнень, ставлення у визначенні мети та організації освітнього процесу, підтримка пізнавального інтересу та наполегливості;
- забезпечення рівного доступу кожного учня до освіти без будь-яких форм дискримінації учасників освітнього процесу;
- дотримання принципів академічної доброчесності у взаємодії учасників освітнього процесу та організації всіх видів навчальної діяльності;
- становлення вільної особистості учня, підтримка його самостійності, підприємливості та ініціативності, розвиток критичного мислення та впевненості в собі;
- формування культури здорового способу життя учня, створення умов для забезпечення його гармонійного фізичного та психічного розвитку, добробуту;
- створення освітнього середовища, в якому забезпечено атмосферу довіри, без будь-яких форм дискримінації учасників освітнього процесу;
- утвердження людської гідності, чесності, милосердя, доброти, справедливості, співпереживання, взаємоповаги і взаємодопомоги, поваги до прав і свобод людини, здатності до конструктивної взаємодії учнів між собою та з дорослими;
- формування в учнів активної громадянської позиції, патріотизму, поваги до культурних цінностей українського народу, його
- історико-культурного надбання і традицій, державної мови;

- плекання в учнів любові до рідного краю, відповідального ставлення до довкілля.

Додаток К

Сучасні засоби навчання

- Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ): використання комп'ютерів, планшетів, мультимедійних дошок, смартфонів та інших цифрових пристроїв для підтримки навчального процесу.
- Програмні засоби: освітні платформи (наприклад, Moodle, Google Classroom); цифрові програми для вивчення конкретних предметів (наприклад, GeoGebra для математики); віртуальні лабораторії та симулятори.
- Інтернет-ресурси та онлайн-навчання: масові відкриті онлайн-курси (MOOCs), такі як Coursera, EdX, Prometheus; вебінари, відеоуроки, онлайн-тренінги та інші форми дистанційного навчання.
- Мультимедійні засоби: використання аудіо-, відео- та анімаційних матеріалів для покращення засвоєння інформації та залучення учнів.
- Адаптивні навчальні системи: програмне забезпечення, яке автоматично підлаштовується під індивідуальні потреби учня, надаючи персоналізовані завдання та матеріали
- Інтерактивні методи навчання: методики, що включають активне залучення учнів до навчального процесу через групові проєкти, обговорення, рольові ігри тощо.
- Дидактичні матеріали: підручники (паперові та електронні), тести, наочні посібники тощо.

Додаток Л

Порівняльна характеристика паперових та електронних підручників

Особливості	Електронні підручники	Паперові підручники
Структура та формат подання матеріалу	• Мають нелінійну структуру: гіперпосилання, динамічні переходи, можливість швидкого пошуку. • Використовують мультимедійні елементи: відео, анімацію, симуляції, 3D-моделі. • Можуть адаптуватися до рівня учня (адаптивні системи).	• Мають лінійну, статичну структуру. • Подання матеріалу обмежене текстом і рисунками. • Не можуть адаптуватися до потреб учня.
Можливості взаємодії	• Дають змогу виконувати вправи онлайн, миттєво отримувати зворотний зв'язок. • Підтримують динамічність: перетягування об'єктів, побудова графіків, тестові тренажери. • Дозволяють учню працювати із додатковими ресурсами (відео, симуляції, цифрові моделі).	• Взаємодія обмежена читанням і виконанням вправ у зошиті. • Зворотний зв'язок можливий лише через учителя. • Не передбачають динамічності.

Доступність та мобільність	• Доступні на будь-якому пристрої: телефоні, планшеті, комп'ютері. • Можуть оновлюватися автоматично. • Завжди з учнем, навіть якщо немає фізичного доступу до паперових матеріалів.	• Фізично важчі, займають місце. • Неможливо оперативно оновити зміст. • Легше використовувати там, де немає техніки або інтернету.
Педагогічні можливості	• Підтримують диференціацію та індивідуальні траєкторії. • Забезпечують високий рівень наочності та моделювання процесів. • Сприяють формуванню цифрової компетентності.	• Краще підтримують навички читання, концентрацію, довготривале запам'ятовування. • Не залежать від технічних умов. • Часто є нормативною основою для змісту навчання.
Організація навчального процесу	• Підтримують дистанційне та змішане навчання. • Дають можливість учителю відстежувати прогрес учнів (аналітика, статистика).	• Переважно використовуються в традиційному очному форматі. • Не мають інструментів моніторингу прогресу.

	• Дозволяють швидко інтегрувати нові завдання та матеріали.	• Вимагають від учителя додаткової підготовки матеріалів.
Когнітивні особливості сприйняття	• Дають перевагу візуалізації, але можуть перевантажувати інформацією. • Потребують саморегуляції, можуть відволікати (повідомлення, інші вкладки).	• Сприяють кращому глибинному читанню. • Не містять відволікаючих стимулів. • Підходять для опрацювання великих текстових фрагментів.
Доступність для учнів з ООП	• Можуть містити адаптивні інструменти: озвучення, збільшення шрифту, альтернативний текст. • Легше інтегруються з програмами для інклюзивного навчання.	• Потребують спеціальних видань (шрифт Брайля, збільшений шрифт), що не завжди доступні.
Економічний та організаційний аспект	• Дешевші в оновленні, але потребують техніки та інтернету. • Потребують цифрової інфраструктури.	• Дорожчі в друці та перевиданні. • Не залежать від технічних ресурсів.

Додаток М

Згідно дослідження О. Столярчук (Столярчук, 2022) розподіл мотивів навчання підлітків здійснюється наступним чином:

Мотиви навчання	Вибір респондентів (%)	Рейтингова позиція
Звичка навчатись	24,5	7
Інтерес до навчальних предметів	27,4	8
Прагнення бути розумним і культурним	49,5	3
Подобається заробляти високі бали	35,5	5
Примушення батьків	20,6	10
Небажання бути гіршим за однокласників	22,7	9
Очікування винагороди від батьків	7,9	12
Шлях до опановування професії мрії	58	1
Засіб вступу до університету в майбутньому	55,7	2
Подобається похвала вчителів	13,7	11
Навчання — це внесок у перемогу України	26	6
Інтерес до спілкування з однолітками	39,6	4

Додаток Н

Згідно дослідження О. Столярчук (Столярчук, 2022) типовим емоційним супроводом навчання підлітків є:

Емоції	Вибір респондентів (%)	Рейтингова позиція
Радість	21,2	7
Інтерес	58,6	2
Захоплення	36,6	5
Байдужість	41,6	4
Сум	20	8
Злість	17,9	9
Тривога	22,5	6
Провина	6,7	10
Втома	61,1	1
Нудьга	51,3	3

Додаток П

Згідно із постановою КМУ № 851 Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти (КМУ, 2024; МОН України, 2023) базовими знаннями є «Методологія математики: множини і операції над ними; бінарні відношення, функціональні та нефункціональні залежності; математична термінологія і символіка; означення в математиці та їх коректність; аксіоматичний метод побудови математичної теорії; види математичних тверджень, форми їх вираження; необхідні та достатні умови; ознаки та критерії; методи доведення тверджень; індуктивні та дедуктивні міркування; формулювання, доведення та спростування гіпотез; математичне моделювання як засіб пізнання відношень і зв'язків об'єктів реального світу; функціональний погляд на рівняння та нерівності; довжина, площа, об'єм, ймовірність як способи визначення міри; алгоритми і схеми розв'язування задач; метод координат у просторі. Числа і вирази: дійсні числа і форми їх подання, відношення на множині дійсних чисел, унарні та бінарні дії над числами; системи числення; алгебраїчні та трансцендентні вирази; перетворення алгебраїчних і трансцендентних виразів. Рівняння і нерівності: алгебраїчні й трансцендентні рівняння та системи рівнянь; алгебраїчні й трансцендентні нерівності та системи нерівностей. Функції: функціональні залежності; алгебраїчні й трансцендентні функції та їх властивості; складені функції; оборотні та необоротні функції; числові послідовності та їх властивості; елементи математичного аналізу. Геометрія: первинні геометричні об'єкти (фігури та відношення) стереометрії; прямі і площини у просторі; двогранні кути; основні геометричні форми: геометричні фігури на площині та в просторі (плоскі геометричні фігури, лінії, поверхні, тіла); многогранники і тіла обертання; об'єм тіла; площа поверхні тіла; геометричні перетворення фігур та простору (рухи, перетворення подібності); розв'язування геометричних задач: на доведення, на обчислення, на побудову, на дослідження.

Координати і вектори у просторі: прямокутна декартова система координат; координати вектора; дії над векторами; відношення векторів у координатній формі; геометричні інтерпретації залежностей, відношень, рівнянь та нерівностей. Дані, статистика та ймовірність: дані та їх види; статистичне дослідження та його етапи (отримання та способи подання даних; абсолютні, відносні та середні величини; вибірки та їх числові характеристики); випадкова величина та її числові характеристики. (КМУ, 2024; МОН України, 2023)»

Додаток Р

КЕЙС: «Стартап доставки їжі DriveEat»

Ситуація: Троє друзів – Максим, Даша та Ігор – запустили у своєму місті стартап з доставки їжі DriveEat. Через 6 місяців роботи вони зібрали дані та виявили цікаві закономірності.

Дані компанії:

1. Витрати на рекламу та кількість замовлень:
 - При витратах 10 тис. грн на рекламу → 200 замовлень на місяць
 - При витратах 40 тис. грн → 400 замовлень
 - При витратах 90 тис. грн → 600 замовлень
2. Час доставки: Час доставки залежить від відстані: $T = 15 + 0.5 \cdot d^2$, де T – час у хвилинали, d – відстань у км
3. Прибуток: Середній чек – 250 грн, собівартість замовлення – 150 грн

ПРОБЛЕМА:

На зборах партнерів виникла суперечка:

Максим: «Треба вкласти всі гроші в рекламу! Витратимо 160 тис. грн – отримаємо купу замовлень!»

Даша: «Ні! Краще розширити зону доставки до 10 км. Зараз возимо тільки в радіусі 5 км».

Ігор: «Давайте спочатку порахуємо. Треба зрозуміти, яка залежність замовлень від реклами, і чи встигнемо ми возити далеко.»

ЗАВДАННЯ ДЛЯ УЧНІВ:

Частина 1: Аналіз даних

1. За даними про рекламу, визнач формулу залежності кількості замовлень (Z) від витрат на рекламу (B): $Z = k \cdot \sqrt{B}$ або $Z = k \cdot B^a$. Знайдіть коефіцієнт та показник степеня.
2. Скільки замовлень буде при витратах 160 тис. грн (план Максима)?

Частина 2: Аналіз доставки

3. Скільки часу займає доставка на відстань 5 км? А на 10 км?
4. У компанії 4 кур'єри, кожен працює 10 годин. Скільки замовлень вони зможуть доставити на відстань до 5 км? А якщо розширити до 10 км?

Частина 3: Фінансовий аналіз

5. Який прибуток від одного замовлення?
6. Порахуй чистий прибуток для плану Максима (160 тис. на рекламу):
 - Скільки буде замовлень?
 - Який валовий прибуток?
 - Віднімаємо витрати на рекламу
 - Чи зможуть кур'єри все доставити?
7. Чи вигідний план Даші (розширення зони)?

Частина 4: Рішення

8. Яку стратегію ви б обрали? Обґрунтуйте математично.
9. Запропонуйте свій оптимальний план з розрахунками.
10. Які ще фактори (не математичні) треба врахувати?

ДОДАТКОВІ ПИТАННЯ ДЛЯ ДИСКУСІЇ:

- Чому залежність замовлень від реклами НЕ лінійна?
- Чому час доставки залежить від квадрата відстані?
- Як масштабувати бізнес далі?
- Які ризики кожної стратегії?

Додаток С

Покрокова інструкція, як створити таку динамічну модель за пару хвилин:

Крок 1: Побудова колеса та кабінки (Геометрична частина)

1. Створюємо повзунок для часу (t):

- Натисніть інструмент повзунок (Slider).
- Назвіть його t , задайте інтервал від 0 до 4 (оскільки повний оберт триває 4 хвилини), крок (Increment) -0.01 .

2. Задаємо кут повороту (α):

- У рядок вводу (Input) введіть формулу кута, який залежить від часу. Оскільки за 4 хвилини кабінка проходить 360° (або 2π радіан), формула буде такою:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{4}$$

3. Будуємо центр колеса та саму кабінку:

- Центр колеса має координати (0; 26), оскільки середня висота 26 м. Вводимо: $O = (0, 26)$
- Створюємо точку M , яка моделює кабінку. Вона обертається навколо центра O з радіусом 24 м. Щоб рух починався з найнижчої точки (0; 2), додамо зсув кута на -90°
- (Опціонально) Можна побудувати коло з центром O та радіусом 24 ($\text{Circle}(O, 24)$), щоб учні бачили саме колесо.

Крок 2: Розгортання руху в синусоїду (Тригонометрична частина)

Тепер нам потрібно перенести рух кабінки на графік, де по осі OX буде час (t), а по осі OY — висота (h).

1. Створюємо рухому точку графіка (P):

- Ця точка бере координату x від нашого часу t , а координату y — від висоти кабінки M (тобто її y -координату).
- Введіть у рядок вводу: $P = (t, y(M))$

2. Вмикаємо слід (Trace):

- Клацніть правою кнопкою миші на точку P і виберіть «Увімкнути слід» (Show Trace). Тепер при русі точка залишатиме за собою лінію.

3. Будуємо ідеальну математичну функцію для перевірки:

- Щоб учні побачили, що їхні теоретичні розрахунки збігаються з графіком, введіть фінальну функцію (наприклад, через косинус зі зсувом або синус):

$$g(x) = -24 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{4}\right) + 26$$

- Графік функції ідеально пройде через слід, який залишає точка P .

Крок 3: Запуск анімації (Ефект для уроку)

- Клацніть правою кнопкою миші на повзунок t і натисніть «Анімація» (Animation on).
- Колесо почне обертатися, точка M рухатиметься по колу, а точка P паралельно малюватиме синусоїду на графіку.

Додаток Т


КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені БОРИСА ГРИНЧЕНКА

СЕРТИФІКАТ НУШ № 215338
засвідчує, що

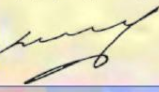
Года Тетяна Юріївна
пройшов(ла) курс тренінгів за Програмою
*підвищення кваліфікації педагогічних працівників закладів загальної середньої освіти
в контексті Державного стандарту базової середньої освіти
в математичній галузі*

Форми навчання:
інтерактивні вебінари та дистанційне навчання

Категорія слухачів:
педагогічні працівники закладів загальної середньої освіти

Обсяг:
30 годин (1 кредит ECTS)

Опис досягнутих результатів:
розвиток ціннісних орієнтирів, ключових та професійних компетентностей; розрізнення понять «типова освітня програма», «освітня програма закладу», «модельні навчальні програми»; розуміння технологій створення модельних навчальних програм та ЕОРів; визначення обов'язкових результатів навчання (за освітньою галуззю); розподіл ролей педагогів при створенні освітньої програми закладу та «шкільної команди»; застосування методів виявлення освітніх запитів та потреб учнів; організація ефективної комунікації з учасниками освітнього процесу; проектування професійного розвитку педагога.

Ректор  Віктор ОГНЕВ'ЮК

21 грудня 2021 року  Наказ ДОН КМДА № 150 від 07.10.2021 р.

Виданий 28/06/2022  № 358477-556184-7 

СЕРТИФІКАТ

з **відзнакою** ПРО ПІДВИЩЕННЯ КВАЛІФІКАЦІЇ ЗАСВІДЧУЄ, ЩО

Года Тетяна Юріївна

успішно завершив(ла) 12-годинний онлайн-курс "Цифровізація навчальних процесів школи за допомогою освітньої системи HUMAN", виконав(ла) 6 практичних завдань та успішно здав(ла) фінальне тестування, здобувши фахові та загальні компетенції згідно з програмою курсу.

СЕРТИФІКАТ ВИДАНИЙ
ТОВ "Х"ЮМАН"

ДИРЕКТОР ТОВ "Х"ЮМАН"
Є.В. БОРОВИК



Сертифікат можна перевірити на сайті <https://www.human.ua/certificates>

