

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені МИХАЙЛА ДРАГОМАНОВА**

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

БОЙКО Юлія Володимирівна

Гриф

Прим. № _____

УДК 373.5.016:51]:[37.091.3:004](043.3)

ДИСЕРТАЦІЯ

**Використання сучасних технологій навчання для повторення та
систематизації курсу математики старшої школи**

01 Освіта/Педагогіка

014 Середня освіта

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело



Ю. В. Бойко

Науковий керівник: **Шкільний Олександр Володимирович**

доктор педагогічних наук, професор

Київ – 2026

АНОТАЦІЯ

Бойко Ю. В. Використання сучасних технологій навчання для повторення та систематизації курсу математики старшої школи. –

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії зі спеціальності 014 «Середня освіта». – Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, 2026.

Проблематика дослідження. Дисертаційна робота присвячена проблемі реалізації підсумкового повторення та систематизації шкільного курсу математики. У дослідженні проаналізовано нормативно-правові документи та науково-методичну літературу щодо організації повторення в старших класах, а також зміст підручників з математики (алгебри та початків аналізу, геометрії) і деяких збірників для підготовки до ЗНО (НМТ) з математики. З'ясовано, що існує запит держави та суспільства на випускників ЗЗСО із глибокими, системними знаннями з математики та належним рівнем математичної компетентності. Важливим етапом формування цілісного уявлення про опанований під час навчання в школі курс математики є підсумкове повторення. Дослідження щодо способу реалізації такого повторення носять розрізнений характер. Крім того, спосіб і засоби реалізації підсумкового повторення та систематизації не регламентуються нормативними документами і покладаються на розсуд вчителя в межах його академічної свободи. З огляду на те, що в освітньому процесі час на підсумкове повторення є обмеженим, а рівень навчальних досягнень та когнітивні особливості учнів є неоднорідними, то виникає потреба в персоналізації навчання. Таким чином, потреба у високій математичній підготовці випускників шкіл, а також необхідність персоналізації навчання на етапі підсумкового повторення зумовили пошук сучасних технологій навчання для повторення та систематизації шкільного курсу математики.

У ході дослідження було розроблено адаптивну практико-орієнтовану технологію повторення та систематизації шкільного курсу математики. Пропоновану технологію було апробовано на 188 учнях старших класів ліцею протягом 2023-2026

років. Результати експериментальної перевірки (у форматі case-study) підтвердили доцільність та ефективність запропонованого адаптивного підходу до повторення шкільного курсу математики. Досягненню позитивних результатів сприяли, зокрема, диференціація завдань та надання учням автономії у виборі темпу навчання. Встановлено, що впровадження пропонованої технології сприяло не лише зростанню рівня математичної компетентності, але й розвитку ключових особистісних якостей школярів (упевненості, відповідальності, самоконтролю).

Прикладна спрямованість повторення та систематизації шкільного курсу математики за пропонованою в дослідженні адаптивною практико-орієнтованою технологією полягає в орієнтації форм, методів та засобів навчання на формування в учнів системи математичних знань, умінь і навичок, необхідних для застосування в житті та майбутній професійній діяльності. Прикладну спрямованість реалізовано за рахунок діяльнісного підходу та адаптивних технологій навчання. Основними засобами є: система різнорівневих задач, розроблені дидактичні матеріали та адаптивні тести.

Наукова новизна дослідження:

1) *теоретично обґрунтовано та розроблено* концептуальну модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення шкільного курсу математики, що дозволяє автоматизовано будувати індивідуальну траєкторію учнів;

2) *запропоновано* алгоритм адаптивного переходу між рівнями складності (початковий, середній, достатній, високий) у процесі тематичного повторення, що забезпечує варіативність шляхів опанування матеріалу та автономність учня у виборі темпу навчання;

3) *розроблено* систему кодування завдань (змістове та рівнєве), яка дозволяє здійснювати автоматичну генерацію діагностичних, тренувальних та комплексних тестів для забезпечення індивідуальної траєкторії повторення та систематизації шкільного курсу математики;

4) *уточнено* поняття «сучасні технології навчання», «адаптивне повторення», «діагностична робота» у контексті завершального етапу навчання математики у

старшій профільній школі, а також класифікацію сучасних освітніх технологій щодо їх можливості застосування в процесі повторення та систематизації.

5) *визначено* методичні передумови застосування сучасних засобів навчання математики на етапі повторення та систематизації шкільного курсу математики;

6) *описано* класифікацію видів повторення та підходів до їх реалізації в освітньому процесі, зокрема способи організації підсумкового повторення курсу математики учнями старшої профільної школи;

7) *набули подальшого розвитку*: методика повторення та систематизації шкільного курсу математики, зокрема в контексті підготовки до стандартизованого оцінювання, через впровадження системи автоматизованого зворотного зв'язку, що включає якісну оцінку помилок та персоналізовані рекомендації; підходи до використання штучного інтелекту для розробки завдань з математики.

Практична значущість дослідження:

1) *створено і впроваджено* в освітній процес авторську систему адаптивного практико-орієнтованого повторення та систематизації шкільного курсу математики;

2) *розроблено* програмний засіб (ПЗ), який реалізує авторську концепцію адаптивного практико-орієнтованого повторення шкільного курсу математики;

3) *запропоновано* систему кодування завдань для реалізації адаптивних тестів відповідно до теми, типу завдання та рівня навчальних досягнень;

4) *створено* банк диференційованих завдань та структурно-логічні схеми й опорні конспекти з основних змістових ліній, передбачених навчальними програмами з математики рівня стандарту та програмою ЗНО з математики;

5) *сформульовано* методичні рекомендації для вчителів щодо організації повторення та систематизації шкільного курсу математики за запропонованою адаптивною практико-орієнтованою технологією.

Ключові слова: методика навчання математики, сучасні технології навчання, повторення та систематизація, Нова українська школа, старша профільна школа, інформаційно-комунікаційні технології, адаптивні технології навчання, освітній процес, персоналізації навчання, практико-орієнтоване навчання математики, штучний інтелект.

ABSTRACT

Boiko, Yu., V. The Use of Modern Educational Technologies for the Review and Systematization of the High School Mathematics Course. – Qualification scientific work submitted as a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy in the specialty A4.04 *Secondary Education (Mathematics)*. – Ukrainian State University named after Mykhailo Drahomanov, Kyiv, 2026.

Research Focus. The dissertation is devoted to the problem of implementing the final review and systematization of the school mathematics course. The study analyzes regulatory and legal documents and scientific-methodological literature regarding the organization of review in high schools, as well as the content of mathematics textbooks (algebra and introduction to calculus, geometry) and select preparation manuals for the External Independent Evaluation (EIE) or National Multi-subject Test (NMT) in mathematics. It was established that there is a state and societal demand for graduates of general secondary education institutions with deep, systemic knowledge in mathematics and an appropriate level of mathematical competence. The final review is a crucial stage in forming a holistic understanding of the mathematics course mastered during school years. Research on how to implement such a review is fragmented. Furthermore, the methods and means of implementing the final review and systematization are not regulated by normative documents and are left to the teacher's discretion within their academic freedom. Given that the time for final review in the educational process is limited, and the level of educational achievements and cognitive characteristics of students are heterogeneous, there is a clear need for personalized learning. Thus, the demand for high mathematical preparation of school graduates, coupled with the necessity for personalized learning during the final review stage, prompted the search for modern teaching technologies for the review and systematization of the school mathematics course.

During the study, an adaptive practice-oriented technology for the review and systematization of the school mathematics course was developed. The proposed technology was tested on 188 high school students of a lyceum during 2023–2026. The results of the

experimental verification (in a case-study format) confirmed the feasibility and effectiveness of the proposed adaptive approach to reviewing the school mathematics course. Achieving positive results was facilitated, in particular, by the differentiation of tasks and granting students autonomy in choosing their learning pace. It was established that the implementation of the proposed technology contributed not only to an increase in the level of mathematical competence but also to the development of key personal qualities of students (confidence, responsibility, self-control).

Applied Orientation. The applied orientation of reviewing and systematizing the school mathematics course using the adaptive practice-oriented technology proposed in the study lies in orienting the forms, methods, and means of teaching toward the formation of a system of mathematical knowledge and skills in students, which are necessary for application in real life and future professional activities. The applied focus is implemented through an activity-based approach and adaptive teaching technologies. The main tools include a system of multi-level tasks, developed didactic materials, and adaptive tests.

Scientific Novelty

1. *Theoretically justified and developed* a conceptual model of a practice-oriented adaptive technology for the repetition of the school mathematics course, which allows for the automated construction of individual student learning trajectories; An algorithm for adaptive transition between levels of complexity (initial, intermediate, sufficient, high) in the process of thematic review has been proposed, ensuring the variability of paths for mastering the material and the student's autonomy in choosing the pace of learning;

2. *Proposed* an algorithm for adaptive transitions between difficulty levels (initial, intermediate, sufficient, high) during thematic repetition, ensuring the variability of learning paths and student autonomy in choosing the pace of study; The concepts of "modern teaching technologies," "adaptive review," and "pedagogical diagnostics" have been clarified in the context of the final stage of teaching mathematics in profile high schools, alongside the classification of modern educational technologies (ICT, microlearning, "flipped classroom");

3. *Developed* a task coding system (by content and difficulty level) that enables the automatic generation of diagnostic, practice, and comprehensive tests to ensure an individual trajectory of repetition and systematization of the school mathematics course;

4. *Clarified* the concepts of "modern learning technologies", "adaptive repetition", and "diagnostic assessment" in the context of the final stage of teaching mathematics in the senior profile school, as well as the classification of modern educational technologies regarding their potential application in the process of repetition and systematization; The following have been further developed: the methodology for reviewing and systematizing the school mathematics course, specifically in the context of preparing for standardized assessment, through the implementation of an automated feedback system that includes a qualitative evaluation of errors and personalized recommendations; as well as approaches to using artificial intelligence for developing mathematics tasks.

5. *Determined* the methodological prerequisites for using modern mathematics teaching tools at the stage of repetition and systematization of the school mathematics course;

6. *Described* the classification of repetition types and approaches to their implementation in the educational process, specifically the methods of organizing the final repetition of the mathematics course for students of the senior profile school;

7. *Underwent further development:* the methodology of repetition and systematization of the school mathematics course, particularly in the context of preparation for standardized assessment, through the implementation of an automated feedback system that includes qualitative error analysis and personalized recommendations; and approaches to using artificial intelligence for the development of mathematics tasks.

Practical Significance

1. An original system of adaptive practice-oriented review and systematization of the school mathematics course has been created and implemented into the educational process;

2. A software tool has been developed that implements the author's concept of adaptive practice-oriented review of the school mathematics course;

3. A task coding system has been proposed for the implementation of adaptive tests according to the theme, task type, and level of educational achievement;

4. A bank of differentiated tasks, structural-logical schemes, and supporting notes covering the main content lines provided by the standard-level mathematics curriculum and the EIE mathematics program has been created;

5. Methodological recommendations for teachers regarding the organization of the review and systematization of the school mathematics course using the proposed adaptive practice-oriented technology have been formulated.

Keywords: mathematics teaching methodology, modern teaching technologies, review and systematization, New Ukrainian School, profile high school, information and communication technologies, adaptive teaching technologies, educational process, personalized learning, practice-oriented mathematics teaching, artificial intelligence.

Список опублікованих праць за тематикою дослідження

Статті у наукових фахових виданнях

1. Tykhonenko, Y., & Shkolnyi, O. (2025). Organization of repetition and systematization of the school mathematics course in a Ukrainian upper secondary profile school. *Фізико-математична освіта*, 40(4), 52-58. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-08>

2. Boiko, Y. (2025). Conceptual model of a practice-oriented adaptive technology for reviewing the school mathematics course . *ScienceRise: Pedagogical Education*, (3 (64), 27–32. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2025.337529>

3. Boiko, Y. (2025). Features of the development and implementation of an adaptive test on the topic “inequalities”. *ScienceRise: Pedagogical Education*, (4 (65), 4–9. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2025.345529>

4. Бойко, Ю. Адаптивна технологія повторення та систематизації шкільного курсу математики та її впровадження в шкільну практику. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2026, N5, 112-123. DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-112-123

Матеріали науково-практичних конференцій

5. Тихоненко, Ю. В. (2022). Використання тестових онлайн платформ для контролю навчальних досягнень при дистанційному навчанні математики. *Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених* (с. 165–166). НУЧК імені Т. Г. Шевченка.

6. Тихоненко, Ю. В. (2023). Пропозиції щодо структури уроку засвоєння нових знань з математики з метою сприяння кращому запам'ятовуванню учнями навчального матеріалу. *XI Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених: матеріали всеукраїнської наукової конференції* (с. 137–138). УДУ імені Михайла Драгоманова.

7. Тихоненко, Ю. В., & Школьний, О. В. (2023). Про використання онлайн-платформ для підготовки до ЗНО математики та математичного блоку НМТ.

Теорія і практика використання інформаційних технологій в умовах цифрової трансформації освіти: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (с. 187–188). УДУ імені Михайла Драгоманова.

8. Тихоненко, Ю. В. (2023). Пропозиції щодо використання адаптивного тестування як засобу діагностики знань учнів з математики. *Актуальні проблеми теорії та методики навчання математики: до 75-річчя кафедри методики навчання математики: збірник тез доповідей VI Міжнародної наукової конференції* (с. 180-181). УДУ імені Михайла Драгоманова.

9. Тихоненко, Ю. В. (2024). Мікронавчання як засіб реалізації активного повторення тем з математики учнями старшої школи. *ІТМПЛЮС – 2024: матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції* (с. 123–124).

10. Тихоненко, Ю. В. (2024). Досвід використання штучного інтелекту для розробки компетентнісних задач. У *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики: збірник наукових праць за матеріалами Міжнародної науково-практичної конференції* (с. 133–135). Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського.

11. Тихоненко, Ю. В. (2025). Досвід застосування технології мікронавчання при подоланні навчальних втрат з математики за курс базової середньої школи. У *Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції* (с.162-164). ДЗ «ПНПУ імені К. Д. Ушинського»

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень.....	12
ВСТУП.....	13
РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи дослідження	21
1.1. Сучасний стан проблеми повторення та систематизації знань учнів з математики у вітчизняній педагогічній практиці	21
1.2. Сучасні технології навчання: класифікація та дидактичний потенціал у процесі повторення та систематизації знань з математики	32
1.3. Засоби та організаційні форми систематизації та повторення курсу математики старшої школи.....	54
1.3.1. Аналіз підручників з математики для старших класів на предмет матеріалів для повторення та систематизації	55
1.3.2. Аналіз збірників для підготовки до ЗНО (НМТ) з математики на предмет використання їх для повторення та систематизації	60
1.4. Психолого-педагогічні передумови повторення та систематизації шкільного курсу математики з використанням сучасних засобів навчання в освітньому процесі для учнів старшого підліткового віку	79
Висновки до 1 розділу	88
РОЗДІЛ 2. Реалізація практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики	90
2.1. Концептуальна модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики.....	90
2.2. Особливості практико-орієнтованого адаптивного повторення та систематизації курсу алгебри (на прикладі змістової лінії «Рівняння і нерівності»)	103
2.2.1. Особливості повторення та систематизації окремих тем розділу «Рівняння» (згідно з класифікатором, наведеним у таблиці 2.2)	106
2.2.2. Особливості повторення та систематизації окремих тем розділу «Нерівності» (згідно з класифікатором, наведеним у таблиці 2.2)	123
2.3. Особливості практико-орієнтованого адаптивного повторення та систематизації курсу геометрії (на прикладі змістової лінії «Планіметрія»)	137
2.4. Опис і результати педагогічного експерименту.....	151
Висновки до 2 розділу	168
ВИСНОВКИ	171
Список використаних джерел.....	175
ДОДАТКИ	191

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ДПА – державна підсумкова атестація

ЗВО – заклад вищої освіти

ЗЗСО – заклад загальної середньої освіти

ЗНО – зовнішнє незалежне оцінювання

ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології

МОН – Міністерство освіти і науки України

НМТ – національний мультипредметний тес

НУШ – Нова українська школа

ПЗ – програмний засіб

СЛС – структурно-логічні схеми

УЦОЯ – Український центр оцінювання якості освіти

ШІ – штучний інтелект

ВСТУП

Актуальність дослідження. Сучасне суспільство та держава висувають високі вимоги до якості математичної підготовки випускників закладів загальної середньої освіти (ЗЗСО). Математика є не лише інструментом для інших наук та базою для багатьох професій, а й фундаментальною наукою, вивчення якої розвиває логічне мислення та здатність до моделювання (Гончаренко, 1997; Слєпкань, 2006). Якісна математична підготовка визначає здатність молоді адаптуватися до соціально-економічних змін, опановувати інновації й посилювати конкурентоспроможність країни (МОН, 2025; Hanushek & Woessmann, 2015). З огляду на це, математична освітня галузь відіграє ключову роль у чинному Державному стандарті базової та повної загальної середньої освіти (2011) та Державному стандарті профільної середньої освіти (2024), а математична компетентність визначена як одна з основних.

Попри нормативно визначену значущість математичної компетентності та включення математики до обов'язкових предметів ДПА і ЗНО (Верховна Рада України, 2014; 2020), результати національних і міжнародних досліджень виявляють суттєві проблеми в математичній підготовці учнів. Звіти УЦОЯО (2025) свідчать про низький рівень знань випускників, що створює перешкоди для їхнього подальшого навчання у ЗВО (Паламарчук & Хом'юк; Voittik & Koreyukina, 2025). Цю тенденцію підтверджують і результати моніторингових досліджень PISA, які продемонстрували відставання математичної компетентності українських школярів від світових показників у 2018 році та ще більше їх погіршення у 2022 році (МОН, 2023).

Подолання виявлених кризових явищ та формування системних і міцних математичних знань, умінь і навичок вимагає уваги до методичних процесів освітньої діяльності. Формування цілісної системи математичних компетентностей за курс повної загальної середньої освіти неможливе без ефективно організованих процесів систематизації та повторення, які є вагомими складовими навчання.

Особливого значення набуває підсумкове повторення у профільній старшій школі, проте на практиці його реалізація стикається з низкою проблем. По-перше, навчальними програмами не передбачено окремо відведеного часу на підсумкове

повторення, натомість воно здійснюється шляхом резервних годин: близько 100 годин для профільного рівня (МОН, 2017а) та лише 32 години для рівня стандарту (МОН, 2017b), які часто витрачаються на діагностику чи подолання освітніх втрат. По-друге, відсутня чітко визначена модель організації такого повторення. У шкільній практиці переважає тематичне, хронологічне повторення матеріалу, що не дозволяє повною мірою вибудувати цілісне та системне уявлення про опановані за період навчання у школі знання, уміння та навички з математики.

Потенціал традиційних методів навчання на етапі підсумкового повторення та систематизації є обмеженим. Зокрема, чинні підручники з математики або не містять завдань на повторення, або містять їх переважно у хронологічному порядку вивчення в шкільній програмі. Збірники для підготовки до ДПА з математики (Істер, 2022; Мерзляк та ін., 2022; Бевз & Васильєва, 2022) як засіб підсумкового повторення втрачають свою актуальність з огляду на скасування державної підсумкової атестації останніми роками, хоча можуть бути використані вчителями на етапі підсумкового повторення та систематизації. Ще одним засобом реалізації такого повторення є збірники для підготовки до ЗНО (НМТ) з математики (Істер, 2021; Ключко, 2023; Капіносов, 2023; Гальперіна, 2023 та ін.). Проте жоден із запропонованих у них підходів до підсумкового повторення та систематизації не є універсальним і вичерпним. Уніфікованого та регламентованого способу реалізації підсумкового повторення та систематизації у старших класах наразі не існує, тому вибір методів та засобів покладається на вчителя в межах його академічної свободи.

Обмеженість у часі, потреба у гнучких дидактичних засобах та необхідність індивідуалізації навчання актуалізують залучення потенціалу сучасних технологій навчання. Вони здатні оптимізувати процес повторення та систематизації, адаптувати його до динамічних змін у формах здобуття освіти, безпекових факторів та індивідуальних потреб сучасних здобувачів освіти.

Теоретичні засади повторення та систематизації ґрунтовно розкриті у працях класиків вітчизняної методики математики (Бевз, 2003; Бурда, 2004; Слєпкань, 2006; Швець, 2014). Питання використання ІКТ та комп'ютерно-орієнтованих систем у навчанні математики висвітлено в дослідженнях Ю. Триуса (2005), С. Ракова (2005),

Т. Крамаренко та ін. (2019). Окремі аспекти повторення в контексті підготовки до ЗНО розглядали Ю. Захарійченко та О. Школьний (2016; 2017), Ю. Ботузова (2020), І. Акуленко та К. Гнезділова (2021), Є. Нелін та О. Мажинська (2023). У закордонних дослідженнях (Rohrer et al., 2015; Sweller et al., 2019; Agarwal et al., 2020) також висвітлено механізми ефективного повторення, проте вони не відображають повною мірою контексту сучасної української освіти. Незважаючи на вагомий науковий доробок, вітчизняна наука відчуває брак комплексних досліджень, присвячених методиці використання саме сучасних (зокрема цифрових та адаптивних) технологій для організації підсумкового повторення і систематизації знань.

Наведені міркування дозволяють виділити суперечність між об'єктивним запитом суспільства і держави на високий рівень сформованості математичної компетентності випускників ЗЗСО та недостатнім рівнем теоретичної і практичної розробленості проблеми використання сучасних технологій навчання для організації підсумкового повторення та систематизації шкільного курсу математики в умовах обмеженого часу та нових освітніх реалій.

Необхідність розв'язання виявленої суперечності зумовила проблему дослідження, яка полягає у пошуку, науковому обґрунтуванні та методичному забезпеченні ефективних шляхів організації підсумкового повторення засобами новітніх технологій. Це зумовило вибір теми дисертаційного дослідження: **«Використання сучасних технологій навчання для повторення та систематизації курсу математики старшої школи»**.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження пов'язане з науково-дослідною роботою кафедри методики навчання математики УДУ імені Михайла Драгоманова. Тему дисертації затверджено на засіданні вченої ради Українського державного університету імені Михайла Драгоманова (протокол №1 від 30.08.2023 р.).

Об'єкт дослідження – процес навчання математики учнів старшої профільної школи.

Предмет дослідження – методика використання сучасних технологій навчання для повторення та систематизації шкільного курсу математики у старшій профільній школі.

Мета дослідження – теоретично обґрунтувати, розробити елементи методичної системи та експериментально перевірити методику використання сучасних засобів навчання, зокрема адаптивних, для ефективного повторення та систематизації шкільного курсу математики в старших класах.

Гіпотеза дослідження: *пропоновані в роботі підходи до повторення та систематизації курсу математики у профільній старшій школі, що ґрунтуються на використанні сучасних засобів навчання, зокрема адаптивних технологій, дозволяють підвищити мотивацію учнів до навчання, ефективно сформувати у них міцні знання, уміння та навички (компетентності).*

Завдання дослідження:

1. *Проаналізувати* стан дослідженості проблеми організації повторення та систематизації курсу математики у старшій профільній школі.
2. *Проаналізувати* наявні наукові дослідження щодо застосування сучасних технологій навчання в освітньому процесі, а також вивчити стан шкільної практики їх впровадження, зокрема на етапі повторення та систематизації.
3. *Визначити* психолого-педагогічні передумови реалізації повторення та систематизації, а також використання сучасних засобів навчання в освітньому процесі для учнів старшого підліткового віку.
4. *Обґрунтувати та розробити* концептуальну модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики в старшій профільній школі.
5. *Експериментально перевірити* ефективність розробленої адаптивної практико-орієнтованої технології повторення та систематизації курсу математики у старшій профільній школі.

Теоретичні методи дослідження: аналіз наукової, методичної та психолого-педагогічної літератури з проблеми дослідження (1.1-1.4 (тут і далі – пункти дисертації)), аналіз та синтез (1.1-2.3), індукція та дедукція (1.1-1.3), порівняння (1.1-

1.3, 2.3, 2.4), аналогія (1.3, 1.4, 2.2), класифікація (1.1-1.3), систематизація та узагальнення (1.1-1.4, 2.2-2.3), ідеалізація та теоретичне моделювання (2.1), статистичні методи (2.4).

Основним *емпіричним методом* дослідження є педагогічний експеримент, який включав також педагогічне спостереження, бесіди, опитування, анкетування, тестування та аналіз результатів, у тому числі за допомогою програмних засобів.

Методологічною основою дослідження є наукові праці вітчизняних та зарубіжних авторів щодо сучасних засобів навчання; способів і засобів повторення та систематизації знань, умінь і навичок з математики; чинні підручники з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11; підходи до реалізації підсумкового повторення, відображені в збірниках для підготовки до ЗНО з математики; психолого-педагогічні передумови навчання математики учнів старшого підліткового віку; нормативні документи, серед яких Державний стандарт базової і повної середньої освіти, Державний стандарт профільної середньої освіти, Концепція нової української школи, Навчальні програми з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів, Програма ЗНО з математики.

Наукова новизна дослідження полягає в тому, що в дисертаційній роботі:

1) *теоретично обґрунтовано та розроблено* концептуальну модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення шкільного курсу математики, що дозволяє автоматизовано будувати індивідуальну траєкторію учнів;

2) *запропоновано* алгоритм адаптивного переходу між рівнями складності (початковий, середній, достатній, високий) у процесі тематичного повторення, що забезпечує варіативність шляхів опанування матеріалу та автономність учня у виборі темпу навчання;

3) *розроблено* систему кодування завдань (змістове та рівнєве), яка дозволяє здійснювати автоматичну генерацію діагностичних, тренувальних та комплексних тестів для забезпечення індивідуальної траєкторії повторення та систематизації шкільного курсу математики;

4) *уточнено* поняття «сучасні технології навчання», «адаптивне повторення», «діагностична робота» у контексті завершального етапу навчання математики у старшій профільній школі, а також класифікацію сучасних освітніх технологій щодо їх можливості застосування в процесі повторення та систематизації.

5) *визначено* методичні передумови застосування сучасних засобів навчання математики на етапі повторення та систематизації шкільного курсу математики;

6) *описано* класифікацію видів повторення та підходів до їх реалізації в освітньому процесі, зокрема способи організації підсумкового повторення курсу математики учнями старшої профільної школи;

7) *набули подальшого розвитку*: методика повторення та систематизації шкільного курсу математики, зокрема в контексті підготовки до стандартизованого оцінювання, через впровадження системи автоматизованого зворотного зв'язку, що включає якісну оцінку помилок та персоналізовані рекомендації; підходи до використання штучного інтелекту для розробки завдань з математики.

Практичне значення одержаних результатів полягає у тому, що було:

1) *створено і впроваджено* в освітній процес авторську систему адаптивного практико-орієнтованого повторення та систематизації шкільного курсу математики;

2) *розроблено* програмний засіб (ПЗ), який реалізує авторську концепцію адаптивного практико-орієнтованого повторення шкільного курсу математики;

3) *запропоновано* систему кодування завдань для реалізації адаптивних тестів відповідно до теми, типу завдання та рівня навчальних досягнень;

4) *створено* банк диференційованих завдань та структурно-логічні схеми й опорні конспекти з основних змістових ліній, передбачених навчальними програмами з математики рівня стандарту та програмою ЗНО з математики;

5) *сформульовано* методичні рекомендації для вчителів щодо організації повторення та систематизації шкільного курсу математики за запропонованою адаптивною практико-орієнтованою технологією.

Результати дослідження можуть бути впроваджені в освітній процес закладів загальної середньої освіти, професійно-технічної освіти, а також використані у системі підвищення кваліфікації вчителів математики.

Особистий внесок здобувача в одержанні наукових результатів полягає в проведенні аналізу сучасного стану проблеми організації повторення та систематизації курсу математики у старшій школі; обґрунтуванні потреби в удосконаленні підходів до повторення та систематизації шкільного курсу математики, зокрема з використанням сучасних засобів навчання; створенні концептуальної моделі практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики; розробці системи кодування завдань для адаптивного тестування та формуванні банку завдань; формуванні системи дидактичних матеріалів для реалізації практико-орієнтованої адаптивної технології повторення курсу математики, що включає розробку завдань, структурно-логічних схем та опорних конспектів; організації та проведенні педагогічного експерименту.

Впровадження результатів дослідження: Основні положення і результати дослідження впроваджено у навчальний процес у двох закладах загальної середньої освіти: Комунальний заклад «Полтавський міський багатoproфільний ліцей № 1 ім. І. П. Котляревського Полтавської міської ради Полтавської області» (довідка 01-27/204 від 3.09.2026) та «Науковий ліцей №3 Полтавської міської ради» (Додаток А).

Апробація результатів дослідження. Основні положення і результати дослідження були оприлюднені та обговорені на наукових конференціях.

- **Міжнародних:** 1) VI Міжнародна наукова конференція «Актуальні проблеми теорії та методики навчання математики: до 75-річчя кафедри методики навчання математики» (6-7 жовтня 2023 р. м.Київ, Україна (дистанційна форма проведення)); 2) V Міжнародна науково-практична конференція «ІТМ*ПЛЮС – 2024» (21-22 листопада 2024 р., м. Суми, Україна (дистанційна форма проведення)); 3) Міжнародна науково-практична конференція «Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики» (27-28 листопада, 2024 р., м. Вінниця, Україна).

- **Всеукраїнських:** 1) Всеукраїнська науково-практична конференція з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання» (1 грудня 2022 р., м. Чернігів; 2) XI Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених (11-13 травня 2023 року, Київ); 3) Всеукраїнська науково-практична

конференція «Теорія і практика використання інформаційних технологій в умовах цифрової трансформації освіти» (29 червня 2023 року м. Київ); 4) Всеукраїнська науково-практична конференція «Наступність у навчанні математики в умовах реформи загальної середньої освіти: реалії та перспективи» (27 березня 2025 р. (дистанційний формат), м. Одеса).

Публікації. Основні результати дослідження опубліковані у 11 науково-методичних працях, серед них: 4 статті у наукових фахових виданнях України (з них 3 одноосібні), 7 тез доповідей у матеріалах конференцій (у тому числі 7 праць одноосібних).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з переліку умовних позначень, вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел зі 155 найменувань, додатків. Загальний обсяг дисертації 266 сторінки, із них 161 сторінки основного тексту, робота містить 6 рисунків та 18 таблиць. Обсяг додатків складає 76 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Сучасний стан проблеми повторення та систематизації знань учнів з математики у вітчизняній педагогічній практиці

Повторення та систематизація знань є невід'ємною складовою процесу навчання математики в школі, зокрема і в старших класах. Перш ніж розглядати підходи до класифікації повторення, його види і способи реалізації, означимо та уточнимо деякі терміни, пов'язані з темою, для однозначного їх трактування. Повторення є складним психологічним процесом, у якому виявляються всі сторони свідомої навчальної діяльності учня (Вашуленко, 2008). *Повторення* в навчанні – відтворення раніше засвоєних знань, умінь і навичок з метою їх удосконалення й застосування до розв'язування нових видів завдань чи вивчення нового теоретичного матеріалу. Повторення сприяє міцному і глибокому засвоєнню знань, умінь і навичок, а також приведенню їх в систему. З точки зору психології засвоєння знань *повторення* є встановленням смислових асоціацій (зв'язків) між новими знаннями й раніше засвоєними (Гончаренко, 1997).

У процесі навчання математики *повторення* – це повернення до раніше набутих знань і навичок, систематичне відтворення їх у пам'яті учнів (Могорита & Лавренова, 2017). Особливим видом повторення є узагальнювальне. *Основними дидактичними функціями повторення* є: закріплення та збереження знань; запобігання забуванню; узагальнення та систематизація; актуалізація знань; діагностика та контроль; коригування; поглиблення розуміння; мотивація до навчання.

Узагальнення – це логічний перехід від одиничного до загального або від менш до більш загального знання, а також продукт розумової діяльності, форма відображення загальних ознак та якостей явищ дійсності (Яцик & Степанюк, 2022). *Узагальнювальне повторення* передбачає не лише репродукцію раніше засвоєного знання чи вміння, а і встановлення зв'язків між поняттями, вивченими в різний час, та приведення їх до певної системи (Симоненкова, 2012).

Систематизація – розумова діяльність, в процесі якої розрізнені знання про предмети (явища) об'єктивної дійсності зводяться в єдину наукову систему, встановлюється їхня єдність на основі вибраного принципу. Вона спирається на класифікацію, аналіз і синтез істотних властивостей певної об'єктивної системи. Здійснюється у формі відповідних логічних систем – теорії, гіпотези тощо (Гончаренко, 1997). *Систематизація знань* розглядається як процес упорядкування та узагальнення навчального матеріалу шляхом виявлення істотних зв'язків між поняттями, що забезпечує формування цілісної, логічно впорядкованої системи знань, а не лише їх накопичення (Савченко, 2012; Слєпкань, 2006). Поняття повторення та систематизації не існують ізольовано одне від одного і тісно взаємопов'язані з дидактичної точки зору. Ми дотримуємося думки, що повторення є інструментом для досягнення систематизації. Відповідно, систематизація, як результат якісного повторення, є умовою ефективного засвоєння знань, умінь і навичок для подальшого навчання та професійної діяльності.

Адаптивне повторення – це організація повторювальних навчальних впливів (питань, вправ, мінітестів, задач), за якої частота, інтервали, рівень складності та добір матеріалу змінюються індивідуально залежно від того, як саме навчається конкретний учень: що він пам'ятає/забуває, де помиляється, що робить повільно, які знання є «крихкими», а які – стійкими (Zaidi et al., 2020). Такий спосіб повторення дозволяє будувати індивідуальну траєкторію для кожного учня, враховуючи його рівень навчальних досягнень і когнітивні особливості. Зазвичай адаптивне повторення реалізовується за допомогою автоматизованих систем, проте з невеликою кількістю учнів елементи такого повторення можуть здійснюватися і без технічних засобів. Отже, можна стверджувати, що *адаптивне повторення* – це спосіб організації повторення, за якого частота, періодичність, рівень складності та добір матеріалу визначаються переважно автоматично із застосуванням програмних засобів і підлаштовуються під індивідуальні потреби кожного учня залежно від його рівня навчальних досягнень та когнітивних особливостей.

Дидактична мета – очікуваний, раніше запланований викладачем результат навчальної діяльності, спрямований на поліпшення засвоєння учнями знань, набуття

вмінь та навичок (Яцик & Степанюк, 2022). *Дидактичною метою повторення та систематизації шкільного курсу математики*, є формування системних знань учнів з математики, поглиблення їх предметних компетентностей та підготовка до подальшого навчання, у тому числі самоосвіти. Детальніше організацію повторення та систематизацію шкільного курсу математики буде розглянуто в пункті 1.3.

У якості оцінювання результатів повторення на систематизації шкільного курсу математики як завершального етапу його опанування можуть бути використані результати загальнодержавних стандартизованих тестувань ДПА і ЗНО (НМТ) з математики. Варто зазначити, що в системі дидактичних цінностей повторення та систематизації як етапу навчання оцінювання відіграє роль засобу вимірювання результатів, але не є самоціллю.

Під час реалізації систематизації та повторення вчителю важливо розуміти, яким чином учнів краще мотивувати до здійснення цієї діяльності. Традиційно розрізняють внутрішню та зовнішню мотивацію до дії: зовнішня зумовлена фізіологічними потребами або стимуляцією середовища, а внутрішня – не залежить від впливу середовища і є результатом власних вольових рішень (Занюк, 2002). Прикладом зовнішньої мотивації повторення та систематизації для здобувачів освіти є різні види оцінювання. Коли зовнішня мотивація є основним рушієм, то досягнення очікуваного результату оцінювання стає метою навчання, а повторення та систематизація знань з математики – засобом його досягнення. Внутрішня мотивація здобувачів освіти до повторення та систематизації більшою мірою збігається з дидактичною метою: привести знання та вміння з математики до цілісної системи, перевірити свою здатність використовувати ці знання та підготуватися до подальшого навчання, у тому числі у закладі вищої освіти. У такому випадку підсумкове оцінювання є засобом вимірювання результатів навчання і підґрунтям для рефлексії.

За нашими спостереженнями, для учнів з достатньою внутрішньою мотивацією прагнення до високого результату оцінювання слугує додатковим фактором, що підсилює ефективність повторення та систематизації курсу математики. У той же час, якщо відбувається зміна пріоритетів і оцінювання стає єдиною ціллю навчання, а весь

процес повторення зводиться до напрацювання навички давати відповіді на завдання конкретних форм і типів завдань, дидактична мета не досягається повною мірою, зокрема що стосується формування предметних компетентностей і готовності до подальшого вивчення математичних дисциплін.

У навчальних програмах з математики для учнів 10-11 класів (МОН України, 2017а-с) повторення та систематизація знань та навичок займає різне місце залежно від рівня, на якому учні вивчали цей предмет. Зокрема, повторення частково винесено в окрему тему алгебри для 11 класів профільного рівня, а саме узагальнення та систематизація рівнянь, нерівностей та їх систем. У програмі профільного рівня для учнів 10-11 класів, які вивчали математику на поглибленому рівні з 8 класу (МОН України, 2017с), також наприкінці алгебри 11 класу виділено 74 години резерву на повторення та систематизацію навчального матеріалу та розв'язування задач. Що стосується геометрії, то в навчальній програмі окремо виділеного часу саме під повторення не прописано, як і в програмі для математики рівня стандарту. Проте в геометрії профільного рівня передбачається 18 годину резерву в 10 класі та 28 годин – в 11 класі, який може бути відведений, у тому числі, на повторення (МОН України, 2017а). На рівні стандарту час резерву для математики становить близько 14 годин у 10 класі та 32 годин в 11 класі (МОН України, 2017b). Отже, відповідно до навчальної програми, час, який може бути використаний на повторення та систематизацію знань з математики у старшій школі залежно від рівня вивчення предмету (рівень стандарту чи поглиблений), наведено в таблиці 1.1.

Частка резервного часу для повторення та систематизації знань та навичок з математики за курс старшої школи залежить від особливостей когнітивних здібностей учнів окремого класу чи групи, організації навчального процесу, освітніх втрат і розривів, можливостей та способу їх подолання.

Час на повторення та систематизацію знань з математики в старшій школі

		Алгебра	Геометрія
10 клас	Рівень стандарту	Резерв: 7 годин	Резерв: 7 годин
	Профільний рівень (поглиблене вивчення з 8 класу)	Резерв: 22 годин	Резерв: 18 годин
	Профільний рівень	Резерв: 24 годин	Резерв: 18 годин
11 клас	Рівень стандарту	Резерв: 18 годин	Резерв: 14 годин
	Профільний рівень (поглиблене вивчення з 8 класу)	Резерв: 74 годин	Резерв: 28 годин
	Профільний рівень	Резерв: 80 годин +30 год. на тему: «Рівняння, нерівності та їх системи. Узагальнення та систематизація».	Резерв: 28 годин

За місцем у навчальному плані повторення може реалізовуватися як протягом навчального року, так і наприкінці нього. Причому, впродовж навчального року це можуть бути окремі уроки-повторення або частини уроків, а також повторення може здійснюватися шляхом актуалізації знань перед вивченням нової теми.

У рекомендаціях до навчальної програми (МОН України, 2017) зазначається, що вивчення нової теми варто починати з діагностичної роботи, аби встановити рівень володіння учнями матеріалом, вивченим раніше та необхідним для успішного засвоєння теми. Уточнимо зміст поняття «діагностична робота», оскільки в методичній літературі воно трактується неоднозначно.

Справді, одні дослідники пропонують вважати родовим поняттям саме діагностику, інші – контроль. Висуваються різні підходи до структури діагностики і контролю, їх функцій та взаємозв'язків (Кудіна, Соловей, & Спіцин, 2007). У міждисциплінарному контексті діагностику трактують як теорію, принципи, підходи, методи й інструменти розпізнання, оцінки й вимірювання об'єктів дослідження, визначення причин і динаміки їх змін із метою подальшого прогнозу й надання рекомендацій щодо покращення актуального стану (Решетник, 2021). Педагогічна діагностика з'ясовує умови та обставини формування знань, умінь та навичок

здобувачів освіти, розвитку їх особистості під час освітнього процесу. Результати педагогічної діагностики дають підстави для коригування навчального процесу, прийняття рішень про вдосконалення його змісту, методів і форм організації, управління навчально-пізнавальною діяльністю здобувачів освіти тощо (Мойсеюк, 2007). Характерною особливістю педагогічної діагностики є прогностичний характер висновків. Такий підхід до трактування поняття діагностики близький до його первинного означення, яке походить із медичної галузі. У перекладі з грецької діагностика є розпізнавання, визначення, наприклад, реального стану об'єкту, його патологій або відхилень шляхом аналізу, обстеження тощо (Kasper et al., 2018). Тобто, адаптуючи медичний підхід до педагогіки, можемо сказати, що *діагностика – це встановлення стану володіння здобувачами освіти навчальним матеріалом, очікуваними вміннями та навичками*. Подальший аналіз результатів діагностики є підґрунтям для побудови або коригування навчального процесу, подібно як висновки медичної діагностики є підставою для призначення лікування.

Інший підхід до трактування поняття діагностики розглядає її як систему точного визначення результатів дидактичного процесу і включає контроль, перевірку, оцінювання, накопичення статистичних даних, їх аналіз, прогнозування, вияв динаміки, тенденцій навчального процесу (Кудіна, 2007). Можемо помітити, що в такому підході діагностика застосовується не до визначення початкового стану, а до результатів дидактичного процесу і пов'язана із поняттям контролю. Як зауважує авторка, діагностика є ширшим поняттям, ніж контроль, оскільки останній лише констатує результати, без аналізу їх причини, а діагностика розглядає результати з урахуванням способів їх отримання, виявленням тенденцій і динаміки навчального процесу. За означенням Н. Тарасенкової, *діагностика – це контроль (нагляд, спостереження, перевірка), облік, оцінювання (встановлення кількісного еквівалента якісних змін в особистому досвіді учня), аналіз статистичних даних, виявлення динаміки, уточнення, коригування, прогнозування* (Тарасенкова, 2023).

У межах даної роботи будемо дотримуватися першого підходу, тобто трактувати *діагностику* як процес встановлення реального стану володіння здобувачами освіти знаннями, уміннями та навичками з визначених тем чи розділів з

метою подальшого планування або коригування освітнього процесу, зокрема повторення та систематизації знань з математики. У межах такого трактування ми не передбачаємо співставлення та порівняння результатів діагностики з певними очікуваними результатами, що характерно для реалізації контролю.

Виходячи з наведеного трактування, будемо вважати, що *діагностична робота* – це організаційна форма навчання, спрямована на визначення наявного рівня володіння здобувачами освіти навчальним матеріалом у певний момент часу. Така робота може бути реалізована у вигляді письмової роботи, тестування в електронному вигляді, усного опитування тощо. Таким чином, діагностична робота дозволяє оцінити готовність учнів до подальшого опанування предмету, спланувати корекцію знань для групи учнів в цілому чи окремих учнів та спрогнозувати подальшу ефективність освітнього процесу.

Діагностичні роботи разом із їх аналізом та коригуванням результатів теж є засобом повторення. Тобто, незважаючи на відсутність окремо відведеного часу на повторення в навчальних програмах, саме повторення є невід'ємною складовою вивчення математики та інтегровано в навчальний процес. Повторення та систематизація здійснюються постійно протягом вивчення математики в школі на різних етапах навчання. Проте підсумкова систематизація знань шкільного курсу математики, на нашу думку, має здійснюватися наприкінці навчання у школі, коли учні вже володіють знаннями з усіх тем, передбачених програмою.

Для більш детального розгляду повторення курсу математики старшої школи варто виокремити *види повторення та способи їх реалізації в навчальному процесі*. За обсягом навчального матеріалу, який повторюється, розрізняють часткове, цілісне та комбіноване повторення (Вашуленко, 2008). Цілісне повторення передбачає розгляд всього навчального матеріалу, часткове – окремих його частин. Під час вивчення математики, цілісне повторення передбачає повторення, наприклад, великої теми або змістової лінії, орієнтоване на усвідомлення змісту теми, що вивчається, її застосування, а також систематизацію опанованого матеріалу. Часткове повторення передбачає опанування знань чи відпрацювання навичок з теми або змістової лінії

ізолювано одна від одної. Комбіноване повторення передбачає чергування цілісного та часткового способів.

Наприклад, повторення теми «Похідна та її застосування» є прикладом цілісного повторення, а повторення таблиці похідних та/або правил диференціювання – приклад часткового повторення. Закономірним є реалізація комбінованого повторення з цієї теми, причому можливим є як перехід від цілісного до часткового, так і навпаки – від часткового до цілісного. У першому випадку першочерговою є систематизація знань, умінь і навичок, реалізована, зокрема, через розв’язування задач на застосування похідної. Виявлені під час цього прогалини в окремих питаннях (безпосередньо обчисленні похідної, застосуванні правил диференціювання тощо) формують потребу в частковому повторенні. У другому випадку часткове повторення може бути інтегроване в освітній процес у вигляді задач на повторення вкінці уроків. Після того, як опрацьовано окремі питання, реалізовується цілісне повторення і систематизація знань, умінь та навичок з теми.

За дидактичними цілями повторення традиційно поділяють на: 1) вступне, 2) поточне, 3) закріплювальне, 4) удосконалювальне, 5) коригувальне, 6) підсумкове (Вашуленко, 2008; Сухіна & Маслакай, 2008). *Вступне повторення* є своєрідною актуалізацією знань перед вивченням нової теми. Прикладом вступного повторення перед вивченням теми «Координати та вектори в просторі» у 10 класі є виконання завдань і повторення формул з теми «Координати та вектори на площині». Також прикладом вступного повторення може слугувати діагностична робота на початку навчального року (чи семестру) обов’язково разом із її аналізом.

Поточне повторення відбувається після опанування нового матеріалу під час уроків введення нових понять або формування навичок і здійснюється під безпосереднім керівництвом учителя (Сухіна & Маслакай, 2008). Мета такого повторення контролююча та практико-орієнтована. Таким чином учитель чи викладач перевіряє коректність та повноту засвоєння учнями розглянутого матеріалу та контролює правильність його застосування. Поточне повторення переважно є частковим за обсягом інформації повторенням.

Закріплювальне повторення зазвичай є практико-орієнтованим активним повторенням, яке проявляється у вигляді розв'язування тренувальних вправ із теми. Такий вид повторення є доцільним на уроках застосування знань, умінь і навичок або уроках узагальнення та систематизації знань. Метою такого повторення є: 1) закріплення у пам'яті учнів вивченого навчального матеріалу, 2) систематизація знань з теми, 3) встановлення логічних зв'язків між новим навчальним матеріалом і раніше вивченим (Сухіна & Маслакай, 2008). Тобто за обсягом навчального матеріалу таке повторення є комбінованим або цілісним.

Удосконалювальне повторення реалізовується для систематизації раніше отриманих учнями знань і навичок та розкриття взаємозв'язку між окремими темами і розділами навчальної програми (Сухіна & Маслакай, 2008). Звісно, таке повторення є цілісним, оскільки охоплює великі обсяги матеріалу. Прикладами такого повторення з математики в старшій школі можна навести повторення змістової лінії «Функції» після вивчення тригонометричних функцій у 10 класі та після вивчення показникової та логарифмічної функцій в 11 класі; повторення властивостей та формул для планіметричних фігур при розв'язанні стереометричних задач тощо.

На етапах поточного, закріплювального та удосконалювального повторення доцільно проводити, зокрема, превентивну діяльність щодо запобігання типових помилок. Проте не всі помилки можливо передбачити, а також заміна учнями власних хибних сформованих алгоритмів дій на правильні може потребувати більше часу. Тобто передбачити всі можливі помилки та уникнути їх до етапу контролю досить складно, а отже в освітньому процесі має місце і коригувальне повторення.

Коригувальне повторення можна розглядати як підвид закріплювального або удосконалювального, яке реалізовується на етапі коригування знань, наприклад під час аналізу перевірочних робіт. Наприклад, під час перевірки контрольної роботи з теми «Похідна та її застосування» було помічено типову для класу помилку в обчисленні похідної добутку, а також у застосуванні геометричного змісту похідної. Відповідно, після написання цієї роботи та аналізу помилок, доцільно включити ці питання для додаткового відпрацювання як одразу після аналізу роботи, так і через певний період часу для закріплення результату.

Підсумкове повторення є цілісним повторенням, яке реалізовується наприкінці певного періоду навчання (чверть, семестр, рік) та охоплює навчальний матеріал, вивчений впродовж цього періоду (наприклад, семестровий або річний контроль) або протягом усього навчання в школі (наприклад, підготовка до ДПА або ЗНО (НМТ)).

Також повторення можна класифікувати *за ступенем залучення учнів*. Згідно з К. Д. Ушинським повторення може бути пасивним чи активним (Вашуленко, 2008). *Пасивне повторення* передбачає багаторазове повторення матеріалу, наприклад формул, *активне повторення* – відтворення вивченого матеріалу після кількох повторень. Прикладом активного повторення під час вивчення математики є застосування правил, теорем, властивостей, формул тощо до розв'язання задач. Зокрема, на етапі вивчення нових понять активне повторення відбувається, коли учні тренуються розв'язувати завдання із застосуванням нової формули без підглядання в конспект чи підручник. Під час наступних етапів повторення пасивний підхід проявляється в нагадуванні необхідних властивостей, теорем, формул вчителем чи використанні конспекту, схем або таблиць, натомість активне повторення – це пригадування цих понять із пам'яті за допомогою ключових слів, використання мнемонічних технік, повернення до ключових задач тощо.

З огляду на зміну ролі вчителя в сучасній парадигмі української освіти, спосіб реалізації повторення можемо класифікувати і *за залученням учителя чи викладача*. Таким чином, учитель може брати безпосередню або опосередковану участь у процесі повторення учнями матеріалу. *Безпосередня участь учителя* проявляється в контакті з учнями та контролі їх діяльності під час повторення та систематизації, наприклад проведенні фронтального опитування, математичних диктантів тощо. *Опосередкована участь вчителя* передбачає підготовку та організацію повторення та систематизації без активної взаємодії з учнями під час цього процесу, аналіз його результатів. До прикладу опосередкованої участі вчителя можна віднести онлайн-тестування з подальшим обговоренням, використання флеш-карток, організацію парних або групових форм роботи, націлених на повторення. За такої форми організації повторення основний виклик, на нашу думку, це контроль правильності і коректності повторюваного матеріалу, особливо без застосування комп'ютерних

технологій. Також прикладом опосередкованої участі вчителя є роль поради́ника та наставника, котрий орієнтує учня, до якого засобу навчання звернутися. Наприклад, це може бути перегляд відео-пояснень із теми, проходження тестів, які мають матеріали для самостійного розбору помилок, використання флеш-карток із самоконтролем тощо.

За змістом навчального матеріалу повторення може реалізовуватися в межах теми, що вивчається (поточне, закріплювальне, удосконалювальне та коригувальне) або за темами, які були вивчені раніше (вступне, підсумкове). Повторення раніше вивчених тем може бути *явним* або *фоновим*. У першому випадку учень усвідомлює, що зараз відбувається повторення. Наприклад, це може бути проведення уроку-повторення, виконання завдань на повторення, актуалізація знань у форматі тестувань чи фронтального опитування тощо. Фонове повторення раніше вивчених тем у математиці відбувається під час розв'язування задач, котрі потребують використання раніше набутих знань і вмінь. Наприклад, фонове повторення планіметрії відбувається протягом усього курсу вивчення стереометрії в старшій школі. Оскільки у випадку фонового повторення фрагмент повторюваного навчального матеріалу є лише складовою більшої задачі, то він не займає всю увагу учня. З цієї причини ми вважаємо фонове повторення ефективним, якщо за залученням учня воно є активним, бо, якщо учитель повідомить необхідну для задачі інформацію, то учень її використає, але не обов'язково запам'ятає та інтегрує в систему своїх знань та вмінь. Фонове повторення також є інструментом реалізації внутрішньопредметних зв'язків під час вивчення математики. Наприклад, під час вивчення похідної функції в 10 класі відбувається фонове повторення властивостей та графіків функцій і, як результат, встановлюється внутрішньопредметний зв'язок між лінійною функцією та геометричним змістом похідної.

На основі зазначеного вище класифікацію видів повторення під час вивчення математики можна представити у вигляді таблиці 1.2.

Класифікація видів повторення

За місцем у навчальному плані	Протягом вивчення нових тем або після вивчення всього навчального матеріалу
За обсягом навчального матеріалу	Цілісне, часткове або комбіноване
За дидактичними цілями	Вступне, поточне, закріплювальне, удосконалювальне, коригувальне, підсумкове
За ступенем залучення учнів	Активне та пасивне
За змістом повторюваного матеріалу	Повторювання поточної теми або раніше вивчених тем
За способом повторення вивченого матеріалу	Явне або фонове
За роллю учителя	Безпосереднє або опосередковане

Наведені у цьому пункті класифікації дозволяють відповідно до поставленої мети обирати методи, засоби та організаційні форми навчання під час повторення та систематизації шкільного курсу математики у старшій профільній школі. Детальніше про різноманітні підходи до організації систематизації та повторення курсу математики в старшій школі розглянемо в пункті 1.3.

1.2 Сучасні технології навчання: класифікація та дидактичний потенціал у процесі повторення та систематизації знань з математики

Поняття технології у тлумачному словнику української мови (Бусел, 2005) визначається як сукупність прийомів, що застосовуються у якій-небудь справі, майстерності, мистецтві. Дослідники в галузі педагогіки пропонують різні підходи до означення педагогічної технології, проте в даній роботі зупинимося на визначенні, пропонованому ЮНЕСКО (Антонова, 2015), відповідно до якого *педагогічна технологія* – це системний підхід до створення, застосування та визначення усього процесу навчання, включно з людськими та технічними ресурсами і їх взаємодією, метою якого є оптимізація форм освіти. *Технологія навчання* (дидактична технологія) – вузьке поняття, яке вказує на конкретну методику викладання чи теми (Дичківська, 2015). Отже, технологію навчання можна розглядати як застосування

педагогічної технології до процесу навчання. Як зазначили у своїй монографії Дубасенюк О.А., Семенюк Т.В., Антонова О.Є.: «Поняття «технологія навчання» є більш вузьким. Воно відображає конкретний шлях оволодіння навчальним матеріалом у межах визначеного предмету, курсу, теми» (Дубасенюк, Семенюк, Антонова, 2003). Е.І. Федорчук поділяє педагогічні технології на виховні та навчальні (Федорчук, 2006). За такого поділу, на нашу думку, можна вважати навчальні «педагогічні технології» та «технології навчання» поняттями синонімічними, про що у своїх дослідженнях зазначають і Лебедик Л.В. та Стрельніков В.Ю., вважаючи різницю формулювань лише варіаціями перекладу з англійської мови (Лебедик, В. Стрельніков & М. Стрельніков, 2020).

Освітня технологія (зазвичай скорочена як edutech або edtech) – це комбіноване використання комп'ютерного обладнання, програмного забезпечення та освітньої теорії та практики для полегшення навчання (Robinson, Molenda, & Rezabek, 2016). Словосполучення «освітні технології» інколи вважають ще одним синонімічним формулюванням до технологій навчання, проте поняття освітніх технологій, особливо його англومовне скорочення edtech, також вживають до позначення комерційної галузі, що займається розробкою та впровадженням технічного та програмного забезпечення для освіти, зокрема освітніх платформ та супутніх послуг. У вітчизняній педагогічній термінології термін *освітня технологія* є ширшим за педагогічну технологію чи технологію навчання, оскільки визначає напрями розвитку освіти в країні чи регіоні (Дичківська, 2015). Тому в контексті повторення та систематизації шкільного курсу математики будемо дотримуватися формулювань «педагогічна технологія» та «технологія навчання», вважаючи їх синонімічними.

Педагогічна технологія повинна задовольняти *критерії технологічності*, до яких належать: концептуальність, системність, керованість, ефективність і відтворюваність (Чепіль & Дудник, 2012). Технології навчання є складовою *методичної системи* (Сисоева, 2011), яка визначає цілі та зміст навчання, і охоплюють методи, форми та засоби реалізації навчального процесу. На відміну від методики, яка може бути варіаційною та динамічною залежно від умов навчального середовища, технологія є більш алгоритмізованою з високим рівнем керованості та

відтворюваності. Таким чином, може допускатися варіативність і взаємозамінність використання різних технологій навчання в реалізації однієї методики.

Поняття педагогічної технології включає в себе три аспекти: науковий, описовий, діяльнісний. З наукової точки зору педагогічна технологія – це складова педагогічної науки, що займається вивченням та розробкою елементів методичної системи та проєктуванням педагогічних процесів. Описовий аспект педагогічної технології відображає алгоритм реалізації цієї технології, застосування конкретних форм, методів і засобів навчання для досягнення планованих результатів. Діяльнісний аспект передбачає реалізацію технологічного процесу в педагогіці (Чепіль & Дудник, 2012).

Ієрархічно педагогічні технології мають загальнодидактичний, предметно-методичний та локальний рівні функціонування. На загальнодидактичному рівні комплексно характеризується освітній процес у певному регіоні, закладі освіти тощо, включаючи алгоритми діяльності та взаємодії суб'єктів та об'єктів процесу. Такі технології, зазвичай, є універсальними по відношенню до предмету викладання та вікової категорії учнів. На предметно-методичному рівні педагогічної технології розглядаються методи, форми та засоби реалізації навчального та виховного процесу у рамках конкретного предмету чи конкретної вікової категорії. Локальна технологія застосовується до окремих частин навчального та виховного процесу, для вирішення, зокрема, конкретних дидактичних завдань у межах певної теми або певного виду діяльності (Прокопенко, 2018).

Перш ніж ми розглянемо сучасні технології навчання, зокрема математики, варто зауважити, що прикметник «сучасні» у даному контексті не означає інноваційні, а вказує на актуальність застосування цих технологій в освітньому процесі без прив'язки до часових рамок виникнення та впровадження відповідної технології. Таким чином *сучасними технологіями навчання* вважаємо сукупність методів, прийомів, організаційних форм і технічних засобів, незалежно від часу їх виникнення, які цілеспрямовано впроваджуються нині в освітній процес задля підвищення його ефективності та досягнення запланованих результатів. Розглядаючи сучасні технології навчання, окремі дослідники визначають їх як альтернативу

традиційній класно-урочній системі організації навчального процесу (Антонова, 2015; Федорчук, 2006; Аніщенко & Яковець, 2007). На нашу думку, не варто протиставляти сучасні технології класно-урочній системі, оскільки застосування певних технологій (наприклад, ігрових, інтерактивних, комп'ютерних тощо) можливе і під час зазначеного формату організації освітнього процесу.

До сучасних технологій навчання математики, тобто таких, що застосовуються нині в освітньому процесі, крім традиційного навчання, відносяться такі особистісно-орієнтовані технології:

- технології розвивального навчання;
- дослідницькі технології, зокрема проблемне та евристичне навчання;
- проєктна технологія;
- технології інтерактивного навчання, технології навчання у співробітництві, ігрові технології, кейс-метод;
- блочно-модульна технологія;
- технологія структурно-логічних схем (СЛС) або опорних конспектів;
- інформаційно-комунікаційні технології;
- технологія перевернутого класу;
- технологія мікронавчання;
- адаптивні технології.

Технології розвивального навчання спрямовані не лише на формування строгих знань та навичок з предмету, зокрема математики, а і на комплексний розвиток особистості, її інтелектуальних, психологічних, моральних та когнітивних якостей. У контексті розвивального навчання учень є не лише об'єктом, а і суб'єктом навчального процесу, що збігається з особистісно-орієнтованою парадигмою сучасної освіти. Питання формування та застосування технології розвивального навчання досліджували Л. С. Виготський, В. Л. Занков, В. В. Давидов, О. К. Дусавицький, Д. Б. Ельконін, Г. С. Костюк, С. Д. Максименко, В. В. Рєпкін, Н. В. Рєпкіна (Семенець 2015). Основними принципами розвивального навчання: навчання на високому рівні складності, навчання у швидкому темпі, провідна роль теоретичних знань, усвідомлення школярами процесу учіння, цілеспрямований і систематичний

розвиток кожного учня. За Виготським розвивальне навчання має орієнтуватися на «зону найближчого розвитку» (Павленко, 2012).

Серед українських педагогів ідеї розвивального навчання обґрунтовували С. Русова та Г. Ващенко, які акцентували увагу на розумовому вихованні, розвитку різних видів мислення та формальних здібностей учнів. У їхніх працях розвивальне навчання пов'язується з індивідуалізацією, активністю, самостійністю, критичним мисленням, зв'язком теорії з практикою та оволодінням способами навчальної діяльності, а не механічним запам'ятовуванням, що узгоджується із концепцією НУШ (Орос, Петечук & Петечук, 2021).

Технології розвивального навчання можуть застосовуватися на усіх етапах навчального процесу під час вивчення математики. На етапі повторення та систематизації принципи даної технології відображаються у підборі системи завдань, яка забезпечить навчання на високому рівні складності, організацію процесу повторення та систематизації в динамічному темпі з активною участю учнів, формування мотивації учнів до усвідомленого навчання.

Дослідницька технологія навчання, що сформувалася в європейській педагогічній думці наприкінці XIX – на початку XX століття, у сучасній науці розглядається як орієнтована на активну емпіричну діяльність учнів і позиціонування їх як першовідкривачів знань. Водночас сучасні дослідження засвідчують, що надмірна орієнтація на відкриття без достатньої теоретичної підтримки може знижувати ефективність навчання, зокрема у математичній освіті (Lazonder & Harmsen, 2016).

До дослідницьких технологій належать проблемне навчання та евристична технологія.

Технологія проблемного навчання спрямована на активне навчання та здобуття знань шляхом застосування когнітивних навичок, критичного мислення та дослідницької діяльності, прояву наукової творчості. Характерною особливістю проблемного навчання є його фокус не лише на засвоєнні учнями нової системи знань, а і на процесі наукового пізнання, яке приводить до формування цієї системи.

Основним інструментом проблемного навчання є проблемне питання або проблемна ситуація, які виникають у момент, коли відомих знань і навичок не вистачає для пояснення явища або вирішення завдання, а також при виникненні протиріч між відомим і новим (Savery, 2006).

Серед переваг проблемного навчання розвиток когнітивних здібностей учня як суб'єкта навчання, активізація навчальної діяльності, розвиток критичного мислення та наукової творчості. Недоліком застосування в математиці є неможливість застосування до тем високої складності або ризику хибних висновків через низький рівень теоретичного викладу в рамках цієї технології.

Засновником науково-педагогічної *концепції евристичного навчання* вважається А. Хуторський. Він розробив відповідну технологію навчання, яка ґрунтується на поєднанні індивідуальної самореалізації учня з колективним вивченням предмету, зокрема математики. Основним прийомом є застосування евристичних правил-орієнтирів (Панова, 2018).

Аналіз теоретичних аспектів евристичного навчання відображено, зокрема, у роботах Зінаїди Слєпкань (2006). На основі цього запропоновано означення евристичного навчання математики як освітньої системи, спрямованої на оволодіння знаннями, уміннями й навичками з математики за допомогою конструювання учнями власної освітньої траєкторії вивчення математики, формування навчально-пізнавальної евристичної діяльності школярів, розвиток творчих і креативних здібностей учнів у процесі вивчення математики (Панова, 2018).

Вважаємо дослідницькі технології доцільними на етапі сприйняття та усвідомлення нового матеріалу, проте не під час повторення та систематизації.

Проектна технологія навчання бере свій початок із гуманістичного напрямку філософії освіти та ідей американського педагога Дж. Дьюї, котрий основним способом набуття знань вважав розв'язання конкретних і вагомих для учня практичних завдань. Пізніше, у 1918 році його учень У. Кілпатрік оформив і дорацював ідеї свого вчителя у відому нині концепцію «методу проєктів». У той же час дана технологія починала впроваджуватися у радянській педагогіці, проте була вилучена й заборонена як така, що не приносить користі, у 1931 році. Поступове

повернення до методу проєктів почалося наприкінці XX століття (Вороненко, 2016; Воевода & Струк, 2014). Тому в українській педагогіці простежується тенденція до сприйняття даної технології як нової. Тим не менше, алгоритм реалізації методу проєктів чіткий і вдало апробований на практиці у європейській та американській педагогіці. Зокрема, розробкам алгоритмів та методичних рекомендацій щодо використання проєктної технології присвячені роботи таких вчених як D. Fried-Booth, T. Hutchinson, F. Stoller, J. W. Thoms, B. J. S. Barron, L. C. Giancarlo, A. J. Draper, S. Sutheimer та інших (Вороненко, 2016).

В Україні теоретико-методологічні засади використання методу проєктів закладені Г. Г. Ващенком. Класифікації видів, етапів та взаємодії в проєктах присвячені дослідження О. М. Пехоти (Пехота, 2001). У сучасній педагогіці метод проєктів визначають як спосіб організації самостійної діяльності учнів, спрямований на вирішення поставлених практичних задач, що інтегрує в собі проблемний підхід, групові методи, рефлексивні, презентаційні, дослідницькі, пошукові та інші методи (Огієнко, 2015).

Характерними рисами методу проєктів є: взаємодія усіх суб'єктів навчального процесу, орієнтована на самостійність учнів; використання знань і навичок із різних тем і галузей знань; відповідність поставлених проблем і завдань потребам та інтересам учнів; чітке дотримання етапів реалізації проєкту як з боку вчителя, так і з боку учнів; творча та наукова спрямованість, високий рівень самоконтролю, дисципліни та рефлексії; спрямованість на практичний та вагомий результат. Результатом проєкту є самостійно розроблений матеріальний чи інтелектуальний продукт, поданий у вигляді усної чи візуальної презентації (Воевода & Струк, 2014).

За кількістю учасників проєкти поділяються на індивідуальні та групові. За видом діяльності проєкти можуть бути творчими, рольовими (ігровими), дослідницькими, інформаційними, прикладними (практико-орієнтованими) та спрямовувальними. За часом виконання поділяються на міні-проєкти (виконуються у межах уроку), короткострокові (виконуються у позаурочний час у межах однієї теми) та довгострокові (виконуються у позаурочний час протягом чверті, семестру, року). За функціями розрізняють навчальний та контролюючий проєкти. За предметно-

змістовним спрямуванням – монопроєкти (реалізуються у межах одного предмету) та міжпредметні проєкти. За характером взаємодії проєкти поділяють на внутрішньокласні, внутрішньошкільні, міські, міжнародні тощо (Вороненко, 2016).

На уроках математики доцільним є використання короткострокових міжпредметних проєктів з навчальною та розвивальною метою, оскільки це сприяє розумінню учнями прикладної спрямованості математичних знань і навичок. З огляду на це вважаємо проєктну технологію одним із можливих засобів систематизації навчального матеріалу.

Інтерактивні технології навчання. Інтерактив («inter» – «взаємний», «act» – діяти) – це активна взаємодія з кимось (учителем, іншими учнями) або чимось (комп'ютером, дидактичними матеріалами тощо) за допомогою діалогу (Єрмоленко, 2022). Помилково вважати, що інтерактивні технології навчання в обов'язковому порядку повинні включати використання програмних та мультимедійних засобів. Як було вказано в означенні, в основі інтерактиву лежить активна взаємодія учасників навчального процесу, проте засоби цієї взаємодії можуть бути різними, а використання гаджетів лише один із варіантів її реалізації. Певною мірою ідея інтерактивного навчання відображена в цитаті: «Успіху не можна досягнути самотійно, а лише разом – у колективі» (Шевчук & Фенрих, 2005).

Характерними ознаками інтерактивного навчання є співробітництво, опора на власний досвід дитини, відкритість навчання, розв'язання проблемних ситуацій, емоційне піднесення. Прикладом інтерактивних технологій є навчання у співробітництві (у команді) та ігрові технології.

Ідея навчання у співробітництві сягає 20-х років XX століття, проте у тодішньому тоталітарному режимі не мала широкого поширення на територіях сучасної України, тому є відносно новою для нашої педагогічної практики. Дослідженням та опису даної технології присвячені роботи таких учених як К. Рудестам, Р. Славін, Е. Аронсон, Д. Джонсон, Р. Джонсон, Ш. Шаран та інших. Основною ідеєю технології співробітництва є поєднання предметної складової та соціального змісту пізнавальної діяльності, розвиток так званих м'яких навичок поруч із формуванням твердих знань, зокрема з математики. Різновидом такого

підходу є *навчання у команді*, де кожен учень має свою зону відповідальності, індивідуальні завдання та цілі, виконання яких сприяє досягненню успіху всієї команди. (Лебедик, 2020). Таким чином учні не лише здобувають знання та навички з математики, а і формують уявлення про модель взаємодії, характерної для більшості колективів та компаній, з якими вони будуть співпрацювати в майбутній професійній діяльності.

До інтерактивних також можна віднести технології ситуаційного навчання та ігрові технології. Технологію ситуаційного навчання, засновану 1924 року у Гарвардській школі бізнесу, також називають кейс-методом. Застосування її в українській освіті вважається новим і більш розповсюдженим у вищій освіті, ніж у шкільній.

Ідея *кейс-методу* полягає в розв'язанні моделі конкретної ситуації за допомогою детального вивчення даних, застосування знань і навичок, здобутих попередньо на оглядових лекціях, використання інших доступних матеріалів, а також обговорень під час занять. Реалізація кейс-технології відбувається у шість етапів: 1) ознайомлення з завданням та аналіз вхідних даних; 2) попередні припущення щодо першопричин проблеми; 3) визначення стратегічних питань та ключових проблем; 4) пошук стратегічних альтернатив (варіантів вирішення); 5) аналіз альтернатив та вибір оптимального рішення; 6) обґрунтування рішення та захист. (Лебедик, 2020)

Незважаючи на новизну технології для української педагогічної практики в цілому, для навчання математики проходження вказаних етапів є типовим при розв'язуванні задач, зокрема прикладного змісту. Особливу користь вбачаємо у проходженні етапів розгляду альтернатив та вибору оптимального рішення на етапі систематизації знань, а саме у вигляді розгляду можливих способів розв'язання завдання та вибору оптимального з них або доведення відносної рівнозначності застосування різних методів.

Блочно-модульна технологія навчання. Модульна технологія навчання реалізовується в нашій країні у рамках євроінтеграції освіти та впровадження європейської кредитно-трансферної системи навчання ECTS (European Credit Transfer System). Застосування даної технології регламентовано Законом України «Про вищу

освіту» та Законом України «Про фахову передвищу освіту» для закладів вищої освіти, проте окремі елементи цієї технології можуть впроваджуватися і в старшій профільній школі.

Основні положення модульної технології навчання були сформульовані в 60-х роках XX століття американським дослідником Дж. Расселом. Метою даного підходу є створення сприятливих умов для розвитку та освіти за рахунок гнучкості змісту навчання та створення індивідуальної освітньої програми, зважаючи на когнітивні особливості та рівень підготовки учнів і студентів (Лебедик, 2020). Розробник технології визначає поняття модуля як навчальний пакет концептуальної одиниці навчального матеріалу та рекомендованих дій для здобувача освіти (Дж. Рассел, 1974). Узагальнивши ряд інших означень, авторський колектив на чолі з Л. Лебедик дає означення модулю як «автономної організаційно-методичної структури навчальної дисципліни, що містить у собі дидактичну мету, логічно завершену одиницю навчального матеріалу, методичне керівництво і систему контролю» (Лебедик, 2020). Поняття кредиту означає умовно позику студентом часу для опанування дисципліни, яка повертається шляхом набуття знань та навичок, котрі підтверджуються у вигляді набраних за семестр балів та складеного заліку або іспиту.

Блочно-модульна технологія у старшій школі ґрунтується на укрупненні навчальних одиниць (Пехота, 2001). За цієї технології навчальний матеріал групується в самостійні блоки (модулі). Кожен такий блок (модуль) є завершеним циклом і складається з таких етапів: вступний блок (оглядова лекція, визначення завдань та очікуваних результатів); практичний блок (самостійна робота, робота в групах, індивідуальні консультації тощо); підсумковий блок (узагальнення матеріалу, тестування, залік тощо). На нашу думку, блочно-модульна технологія є зручним та ефективним способом реалізації підсумкового повторення, коли попередніх знань учнів достатньо для того, аби впроваджувати укрупнення навчальних одиниць, не втрачаючи якості засвоєння матеріалу.

Технологія структурно-логічних схем (СЛС) або опорних конспектів виникла в середині XX століття як спосіб організації навчального матеріалу для полегшення процесу засвоєння та повторення знань. Це була спроба структуризації

великих обсягів інформації, що сприяло кращому її розумінню і запам'ятовуванню. Дана технологія базується на системі знаково-символічного моделювання, що задіює зорово-образну пам'ять та системне мислення (Пехота, 2001). Вагомий внесок у розвиток та популяризацію опорних конспектів зробив у 1970-х роках український педагог-новатор В.Ф. Шаталов, який активно застосовував опорні схеми у викладанні. В Україні СЛС та опорні конспекти широко використовуються в освітньому процесі для підвищення ефективності навчання через візуалізацію матеріалу та систематизації знань і встановлення логічних зв'язків між поняттями (Бутенко, 2015). Розвитку і впровадженню даної технології присвячені також роботи О. Лейбовича, І. Зязюна, О. Прокоповича, Є. Єрмоленка та ін.

Основними особливостями технології СЛС або опорних конспектів є: візуалізація та встановлення зв'язків між поняттями, лаконічність, структурованість матеріалів та універсальність застосування в різних дисциплінах та на різних етапах навчання. Основними перевагами можна визначити підвищення ефективності навчання та зручність у повторенні матеріалу, оскільки візуальні стислі теоретичні викладки дозволяються пришвидшити пошук необхідних теоретичних викладок та є візуальними тригерами для активізації самостійного пригадування. Серед недоліків зазначимо ризик надмірного спрощення та зниження творчості учнів.

Технологія СЛС та опорних конспектів, на нашу думку, є дієвим інструментом для систематизації знань учнів, зокрема підсумкової. Вважаємо доцільним здійснювати систематизацію знань з побудовою СЛС чи створенням опорних конспектів за основними змістовими лініями. Це дозволяє учням сформулювати цілісне уявлення про обсяг вивченого навчального матеріалу та візуалізувати внутрішньопредметні зв'язки.

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ), у тому числі під час дистанційного та змішаного навчання, виконують роль доповнення та модифікації інших технологій навчання. Наприклад, метод проєктів може реалізовуватися за допомогою ІКТ, так само і дослідницька технологія тощо. Більше того, лекційний матеріал на уроці введення нових понять, поданий за допомогою презентації, – це теж використання ІКТ, як і комунікація вчителя з учнями через пошту, електронний

журнал, меседжери тощо. Оскільки використання зазначених технологій навчання є широким і наскрізним у сучасній шкільній освіті, то спробуємо класифікувати ці технології за їх видами, способом застосування, дидактичними цілями та роллю вчителя та учнів при їх використанні.

З технічної точки зору ІКТ поділяють на системні (апаратні) та програмні. Перший вид включає в себе матеріальне забезпечення, на якому будується використання відповідних технологій. Наприклад, використання мультимедійних технологій, комп'ютерно орієнтовані системи навчання або мобільне навчання. Другий вид включає конкретні програмні засоби (ПЗ) для реалізації навчання. У свою чергу, програмні засоби можна розділити на загально організаційні (наприклад, програми для створення візуального контенту, електронні щоденники, освітні платформи тощо), загально предметні (наприклад, тестові платформи, онлайн дошки), та конкретно предметні (наприклад, динамічне геометричне середовище GeoGebra, графічні калькулятори для математики).

За способом застосування інформаційно-комунікаційні технології можуть бути синхронними та асинхронними. Прикладом синхронного використання ІКТ є проходження тесту під час уроку в реальному часі, застосування онлайн-дошки на уроці, дослідження графіків чи геометричних фігур за допомогою ПЗ на уроці тощо. Прикладом асинхронного використання ІКТ є виконання тесту вдома, робота з електронним підручником чи відео, надсилання виконаних робіт через електронну систему управління навчанням тощо.

Дидактичні цілі використання тих чи інших ПЗ залежать від типу уроку (засвоєння нових знань, формування умінь та навичок, застосування умінь та навичок, узагальнення та систематизація знань, перевірка і корекція знань) та поставлених вчителем задач. Наприклад, використання динамічного геометричного середовища може бути доречним на етапі введення нових знань, оскільки за його допомогою можна більш детально та всебічно розглянути властивості фігур, проте не вважаю доцільним використовувати даний засіб на етапі формування вмінь та навичок задля спрощення чи пришвидшення побудов, оскільки це може призвести до освітніх втрат, пов'язаних із формуванням абстрактного та просторового мислення.

Проте, на етапі систематизації знову може бути корисним повернутися до даного засобу, аби, наприклад, порівняти властивості різних фігур.

Роль учня під час використання ІКТ може бути активною або пасивною. До пасивних ІКТ можна віднести перегляд презентацій чи відео, до активних – виконання завдань, у тому числі під час перегляду відео, проходження веб-квестів, самостійне виконання побудов чи розрахунків за допомогою ПЗ тощо. Важливо, що сам програмний засіб не є активною чи пасивною технологією, його роль визначається вчителем. Наприклад, використання графічного калькулятора може ставити учня в пасивну позицію, якщо вчитель демонструє його використання учням на екрані, або в активну позицію, якщо учні при цьому виконують власні побудови або розрахунки зі своїх комп'ютерів чи телефонів.

Роль учителя під час використання ІКТ завжди буде активною, проте вона може бути явною, прихованою або частково прихованою. Подача лекційного матеріалу з допомогою мультимедіа, онлайн-дошок тощо – це варіанти явної участі вчителя. Прихована роль учителя під час використання ІКТ проявляється в управлінні електронним навчальним середовищем (організація навчального онлайн-простору, виставлення завдань, дидактичних матеріалів, тестів на освітній платформі тощо). Частково прихована роль учителя буде під час використання онлайн-дошок, на яких працюють учні, проходженні ними веб-квестів, ігор на уроці тощо. У цьому випадку вчитель відіграє роль модератора, який постійно взаємодіє з учнями і керує організацією їх діяльності, проте не контролює безпосередньо цю діяльність.

Результати досліджень М. Жалдака, Н. Морзе, С. Ракова та ін. вказують, за словами Т. Крамаренко, на те, що «впровадження ІКТ у навчання математики створює передумови поглиблення змісту математичної освіти, сприяє інтенсифікації процесу навчання, розвиває особистість, стимулюючи пізнавальну активність, сприяє підготовці спеціалістів, здатних працювати в умовах інформаційного суспільства та ефективно використовувати математичні знання на практиці» (Крамаренко, Корольський, Семеріков, & Шокалюк, 2019).

Варто наголосити, що ІКТ є хоч і наскрізними, проте, все таки, інструментами у навчанні математики. Тому використання даних технологій повинно бути

зумовлене цілями уроку, а не цілі уроку впливати із бажання використати певний інструмент. Різноманіття програмних засобів, особливо загально предметних, не повинно змушувати вчителя використовувати їх усі. Кожен засіб у роботі вчителя повинен бути добре йому знайомим та зручним у застосуванні, а також з кожним із цих засобі учитель повинен ознайомити учнів, до яких планує його застосовувати.

Отже, на етапі повторення та систематизації шкільного курсу математики, як і в освітньому процесі в цілому, доцільним для використання варто вважати такий програмний засіб, корисний ефект від якого перевищує час і зусилля учителя та учнів на його застосування. Корисний ефект можна розглядати з точки зору досягнення дидактичних цілей та точки зору затраченого часу. Наприклад, використання тестових онлайн-платформ замість написання письмового тесту без розгорнутих відповідей, є вдалим прикладом, оскільки дидактична мета досягається такою ж мірою, проте значно зменшується час перевірки (вигода для вчителя) та з'являється можливість миттєвого зворотного зв'язку щодо результатів тесту (вигода для учня).

Технологія «перевернутий клас» впроваджується у світовій педагогіці з 2008 року (Цісарук & Цісарук, 2017), її засновниками вважаються вчитель математики Салман Хан та вчителі хімії Аарон Семс і Джонатан Бергман (Телев'як, 2016). Хоч технологія відносно нова, проте вже апробована в українській освіті, зокрема через вимушений перехід до дистанційного та змішаного навчання з 2020 року. Застосуванню цієї технології присвячені роботи, зокрема, В. Кухаренка, А. Литвинова, С. Попадюк, М. Скуратівської. Перевага даної технології полягає в звільненні часу уроку від теоретичних аспектів на користь практичної складової, що робить її актуальною для сучасної української освіти, коли реальний час уроку значно скорочується через безпекові фактори.

Ідея перевернутого навчання полягає в ознайомленні учнів із теоретичними основами нової теми та найпростішими алгоритмічними завданнями з неї самостійно, в якості домашнього завдання. Натомість під час уроку учні тренуються використовувати здобуті самостійно знання на практиці, відпрацьовувати та поглиблювати свої навички під наглядом та контролем учителя. Тобто роль учителя змінюється від «джерела інформації» до наставника. Така зміна ролі є закономірною,

зважаючи на місце знання та розуміння у таксономії Блума. Передбачається, що ці рівні є підсильними кожному учню для самостійного опанування. Проте, варто пам'ятати, що, разом з тим, вони є необхідним підґрунтям для переходу до вищих шаблів таксономії як аналіз, оцінювання, синтез. Тому важливим при організації перевернутого класу є контроль опанування матеріалу, винесеного на самостійне вивчення. Одним із варіантів контролю є тестування (контролююче чи діагностичне). Під контролюючим тестуванням мається на увазі тест під час або одразу після самостійного ознайомлення з новим матеріалом. Діагностичним тестуванням у даному випадку буде робота, виконана на початку уроку з учителем. Її результати показують, по-перше, чи ознайомилися учні з наданим матеріалом, а , по-друге, наскільки вони його засвоїли і готові працювати з ним прямо зараз на уроці. Зрозуміло, що навіть при добросовісній та академічно чесній роботі з самостійними матеріалами результати первинного контрольного тесту та діагностичного тестування на уроці можуть значно відрізнятись для одного і того ж учня за рахунок слабо сформованих або втрачених в часі знань та навичок. Тому при застосуванні технології перевернутого класу важливе місце варто виокремити для системи контролю та коригування знань.

Крім збільшення часу практичних занять під час навчання з учителем, до переваг даної технології варто віднести високий рівень персоналізації навчання, оскільки матеріали для самостійного опрацювання (відео, електронні підручники, інтерактивні аркуші тощо) учні можуть опановувати у власному темпі, переглядаючи їх повторно або, навпаки, у пришвидшеному відтворенні. Основні недоліки та виклики для вчителя та викладача – це контроль виконання самостійного завдання учнями, їх мотивація до навчання та відповідальності, а також контроль коректності формування та своєчасне коригування знань та навичок учнів у ході їх самостійної роботи.

На нашу думку, технологія «перевернутий клас» є зручним та дієвим інструментом для реалізації підсумкового повторення та систематизації. Причому на самостійне опрацювання до уроку може бути винесено як теоретичний матеріал (наприклад, у вигляді оглядової лекції в записі), так і систему задач або тестування на

розуміння теоретичного матеріалу. Результати виконання таких задач чи тесту дозволяють вчителю оцінити поточний рівень володіння учнів знаннями, уміннями та навичками з теми та спланувати подальшу траєкторію повторення.

Мікронавчання – це технологія навчання, яка передбачає використання коротких за обсягом уроків (Bersin, 2017). Такі уроки зазвичай представлені у вигляді коротких (до 15 хвилин), динамічних, естетично оформлених відео та можуть включати експерес-контроль у вигляді тесту. Назва даної технології пов'язана, насамперед, з тривалістю одиниці навчального матеріалу, проте варто зауважити, що реалізація таких коротких уроків здійснюється засобами електронного навчання.

Перехід до коротших форм навчання у шкільній освіті пов'язаний з розвитком кліпового мислення у сучасних підлітків та зниженням середньої тривалості концентрації уваги (Mohammed, Wakil, & Nawroly, 2018). До переваг мікронавчання належать: краще запам'ятовування понять, вища залученість учнів, підвищення мотивації учнів до навчання, заохочення до спільного навчання, покращення продуктивності (Leong, Sung, Au, & Blanchard, 2021). Одним із недоліків для навчання математики можна виокремити недостатність часу для заглиблення в предмет та розв'язання більш складних та комплексних завдань. Таким чином, при вивченні математики вбачаю доцільним застосування даної технології на етапі введенні нових понять, у тому числі, в рамках перевернутого навчання. Ми маємо яскравий приклад реалізації мікронавчання в українській педагогічній практиці у вигляді Всеукраїнської Школи онлайн. Також мікронавчання може бути використаним на етапі коригування знань, зокрема під час повторення та систематизації. Можливість побудови індивідуальної траєкторії повторення та коригування знань учнів у навчальній групі за допомогою коротких відео з конкретної проблемної для них теми дозволить викладачу ефективно організувати процес систематизації знань та подолання освітніх втрат. Для цієї цілі важливим аспектом є розробка інформативної системи діагностики та виявлення навчальних прогалин у знаннях та навичках учнів та студентів.

На етапі повторення та систематизації мікронавчання може бути елементом застосування технології «перевернутий клас», а також способом реалізації індивідуальної траєкторії навчання учнів.

Адаптивні технології навчання почали розвиватися в середині XX століття, зокрема в 1950-1960-х роках, у США та Європі. Їх поява пов'язана з розвитком кібернетики та інформатики, що дозволило створювати системи, здатні підлаштовувати навчальний процес під індивідуальні потреби учнів. В Україні адаптивні технології лише починають активно досліджуватися та впроваджуватися в освітній процес. Зокрема, вони використовуються для індивідуалізації навчання, підвищення мотивації учнів та ефективності засвоєння знань.

Одним із засновників адаптивних систем навчання вважають американського психолога Б. Ф. Скіннера, який у 1950-х роках розробив концепцію програмованого навчання. В Україні дослідженням цієї проблеми присвячені праці Ю. Носенко, О. Ляшенко, В. Дем'яненко, Л. Кравцова, Н. Камінська. Сучасний етап розвитку адаптивних технологій спирається на інтеграцію алгоритмів машинного навчання, систем штучного інтелекту та методів освітнього інтелектуального аналізу даних (С. Romero & S. Ventura, 2020), що забезпечує автоматизоване коригування освітнього процесу в режимі реального часу.

Основними характеристиками адаптивних технологій є: персоналізації, інтерактивність, швидкий зворотний зв'язок, автоматизація діагностики та оцінювання, гнучкість та оптимізація часових ресурсів (Ляшенко, 2019). Персоналізації сприяє формуванню індивідуальної траєкторії засвоєння знань та регулюванню когнітивного навантаження. Неперервний та інтерактивний зворотний зв'язок надає миттєву реакцію адаптивної системи на успішність виконання завдань без необхідності очікування перевірки вчителем. Автоматизовані діагностика й оцінювання сприяють виявленню прогалин у знаннях, уміннях та навичках на ранніх етапах та дозволяють адаптувати навчальний матеріал під освітні потреби користувача (наприклад, за алгоритмами комп'ютерного адаптивного тестування). Гнучкість та оптимізація часових ресурсів забезпечують раціональний перерозподіл навчального часу на користь складніших або не засвоєних учнем тем.

Педагогічні виклики та обмеження впровадження адаптивних технологій в освітньому процесі пов'язані з вимогами до саморегуляції учнів, технічно-інфраструктурними факторами, етичними та безпековими аспектами. Зокрема, за умов недостатньої навчальної дисципліни, низького рівня внутрішньої мотивації та рефлексивних навичок висока автономія може спричинити фрагментарність засвоєння знань. Адаптивні системи потребують забезпечення стабільного високошвидкісного підключення до мережі, відповідної апаратної бази, сумісності програмних засобів і безперервного оновлення контенту. Також такі системи мають забезпечувати кібербезпеку й конфіденційність під час збору, обробки та збереження цифрового сліду здобувачів освіти.

Таким чином, серед переваг застосування адаптивних технологій відзначимо підвищення ефективності та мотивації учнів, оптимізацію часу та високий рівень самостійності та персоналізації. Однак, за умови низької дисципліни та браку самоконтролю, останній пункт може стати недоліком. Також дана технологія має ряд обмежень, пов'язаних з технічними аспектами. Попри це ми припускаємо, що переваги застосування адаптивних технологій на етапі підсумкового повторення та систематизації шкільного курсу математики, переважатимуть над недоліками. Проте також вважаємо, що попри можливу автономність учнів під час роботи з адаптивними технологіями, не варто виключати участь вчителя, особливо для учнів, котрі мають труднощі з дисципліною та саморегуляцією.

Отже, на сьогодні існує великий спектр педагогічних технологій, які використовуються під час навчання математики. У даному пункті було розглянуто технології, які за нашими спостереженнями, найактивніше застосовуються у шкільній практиці. Більшість із розглянутих технологій навчання, які використовуються у сучасному освітньому процесі, зародилися в першій половині XX століття і вже зайняли міцні позиції в світовій педагогіці. Деякі ж із технологій, як от перевернутий клас чи мікронавчання, є більш новими і їх активний розвиток пов'язаний, у тому числі, з процесами діджиталізації та їх наслідками. Спільними для розглянутих технологій є сприяння індивідуалізації навчальної траєкторії при збереженні соціальної взаємодії. Таким чином для забезпечення особистісно-орієнтованого

навчання для вчителя важливо бути знайомим із даними технологіями та вміти обрати серед них найбільш доцільну для конкретного випадку. Вибір технології повторення та систематизації знань з математики ґрунтується на дидактичних цілях та організаційних формах реалізації цього процесу.

З точки зору визначення цілей повторення, можна розмежувати технології *за обсягом повторюваного матеріалу* (окремі поняття, тематичне, за змістовими лініями, комплексне повторення всього курсу математики тощо) та *за місцем у навчальному процесі* (актуалізація знань перед вивченням нової теми; повторення раніше вивчених понять, інтегроване у вивчення нових тем; повторення раніше вивчених тем або розділів, яке відбувається окремо від вивчення нового матеріалу тощо). Наприклад, для актуалізації знань з окремих питань перед вивченням нової теми може бути достатньо фронтального опитування або колективного розв'язування відповідних завдань, проте в такій формі організації повторення вбачаємо ризик не залучення усіх учнів, що може сприяти лише посиленню їх навчальних втрат. Проте, актуалізація знань може слугувати не лише підготовкою до сприйняття нового матеріалу, але і одним із способів виявлення та подолання навчальних та освітніх втрат. *Втратами* називають різницю між потенційно можливими та реальними досягненнями дитини. *Навчальними втратами* є втрати саме в академічних знаннях і навичках, у той час як *освітні втрати* включають в себе соціальний і психічний розвиток та виховання (Державна служба якості освіти України, 2023).

Одним із засобів подолання навчальних втрат і прогалин у знаннях учнів з математики є встановлення внутрішньопредметних зв'язків. Це також сприяє формуванню в учнів цілісної системи математичних знань, умінь і навичок, де одні концепції природно підтримують і закріплюють інші (Лук'янова & Філон, 2023). Засобами актуалізації знань, які сприяють виявленню навчальних та освітніх втрат, можуть бути тестові онлайн-платформи. Даний засіб дозволяє одночасно перевірити знання усіх учнів класу чи групи та одразу побачити їх результати для аналізу та коригування. Таке тестування може проводитися, наприклад, і у форматі гри з обговоренням, за потреби, кожного окремого питання одразу після відповіді групи на нього. Таким чином, не лише учні повторюють раніше вивчені поняття та готуються

до сприйняття нового матеріалу, але і вчитель отримує цінну інформацію для організації навчального процесу. Зокрема, учитель має можливість одразу на уроці провести коригування навчальних втрат, які помітно по типових помилках групи чи класу, а також зауважити навчальні втрати окремих учнів і спланувати їх подолання. Для подолання навчальних втрат виникає необхідність побудови індивідуальної траєкторії навчання учня, реалізація якої може бути забезпечена засобами мікронавчання. У межах цієї технології вчитель надає учневі короткі відео з теми, яку потрібно посилено повторити або вивчити, та матеріали для контролю або самоконтролю, встановлює терміни та перевіряє виконання завдання. При цьому варто зауважити, що на учня збільшується навантаження, тому може бути потреба скоригувати кількість завдань на самостійне опрацювання з нової теми.

Хоча актуалізація знань може виконувати допоміжну функцію, першочерговою метою має підготовку учнів до сприйняття нового матеріалу. З цієї причини тривалість виділеного часу на її реалізацію не повинна бути значною. Зазвичай для актуалізації знань підбирають теоретичні питання або достатньо легкі завдання, які не потребують значних затрат часу на їх виконання.

Для більш детального зосередження на тематичному повторенні, воно може бути реалізоване як окремий урок чи частина комбінованого уроку. У такому випадку повторення може і, на нашу думку, повинне містити завдання та задачі різного рівня складності. За такого типу повторення доцільним може бути колективне розв'язування задач, завдяки чому учитель має змогу звернути увагу учнів на ключові моменти, де виникають або можуть виникнути типові помилки.

Оптимальним варіантом тематичного повторення, на нашу думку, є поєднання тестового контролю учнів щодо володіння необхідними теоретичними знаннями і формулами, вміння застосовувати їх у типових ситуаціях та колективного розв'язування задач на повторення під керівництвом учителя. Відповідно, якщо за результатами тестового контролю, є потреба у коригуванні знань окремих учнів, воно може бути реалізоване засобами мікронавчання як у якості додаткового домашнього завдання, так і безпосередньо на уроці. Наявність готових коротких відео з поясненням окремих питань з теми дозволяє вчителю координувати процес

повторення прямо на уроці, призначаючи учням відео для опрацювання залежно від рівня їх залишкових знань з теми. Тобто орієнтовна структура уроку-повторення з певної теми може виглядати так: первинне тестування залишкових знань учнів з теми, коригування знань за допомогою колективного аналізу типових помилок та індивідуальної роботи з теоретичними викладками за допомогою конспектів і коротких відео для учнів, які мають більші навчальні втрати, колективне розв'язування завдань і задач на повторення, індивідуальна робота на уроці і/або вдома. Причому завдання і задачі для індивідуальної роботи доцільно підбирати відповідно до рівня готовності окремих учнів.

Отже, використання засобів мікронавчання та диференціація завдань для самостійної роботи дозволить учням повторювати та систематизувати навчальний матеріал відповідно до їх освітніх потреб та можливостей, досягати власних зон найближчого розвитку, забезпечуючи реалізацію особистісно-орієнтованої парадигми навчання.

Під час повторення всього курсу математики варто пам'ятати, що учні мають різний рівень як залишкових знань, так і навичок розв'язування задач і виконання завдань різних форм представлення. Таким чином важливим є забезпечення якісної діагностики знань, швидкого зворотного зв'язку та матеріалів для коригування знань. Відповідно, доцільним вбачаємо використання засобів ІКТ, зокрема тестових онлайн-платформ, які дозволяють в реальному часі відслідковувати результати групи учнів, у тому числі і швидкість виконання ними завдань.

Зважаючи на те, що на етапі повторення та систематизації учні вже знайомі з усіма темами, вбачаємо доцільним застосувати елементи технології перевернутого класу, зокрема розгляд теоретичного матеріалу та виконання типових завдань частково винести на самостійне опрацювання, а час на уроці приділяти розбору питань та розв'язуванню складніших або нестандартних задач. Якщо на підсумкове повторення відведено достатньо часу, то на цьому етапі також доцільно, на нашу думку, використати інтерактивні методи навчання, зокрема за допомогою ігрових технологій можна тренуватися не лише розв'язувати завдання та задачі, а і мотивувати учнів тренуватися це робити на швидкість, не втрачаючи якості. Також

вбачаємо доцільним використання технологій навчання у команді та кооперативного навчання для повторень різних тем у межах змістової лінії, наприклад властивостей і графіків різних елементарних функцій. Крім того, застосування набутих знань і навичок до розв'язування прикладних задач може бути організовано за допомогою елементів проєктної технології. Прикладна задача може слугувати міні-проєктом, для якого учні підбирають та аналізують способи розв'язання, обирають, обґрунтовують та презентують найбільш раціональний.

Перелічені вище технології навчання можуть бути адаптовані та застосовані як для уроків у класі, так і для дистанційного та змішаного навчання. Проте, на нашу думку, використання інтерактивних технологій (ігрові технології, навчання в команді, кооперативне навчання) більш доречно в режимі безпосередньої взаємодії у закладі освіти під час аудиторного навчання або під час очної складової змішаного навчання. Використання технологій перевернутого класу та мікронавчання передбачає вагому роль індивідуального навчання, через що добре застосовуються в онлайн і змішаному навчанні. Проте, як зазначалося вище, під час повторення та систематизації використання згаданих технологій може мати місце і за аудиторного навчання для подолання навчальних втрат окремих учнів. Аналогічно, інформаційно-комунікаційні технології є невід'ємною складовою сучасного освітнього процесу в Україні, зокрема тестові онлайн-платформи дозволяють оцінити рівень знань учнів з математики та миттєво отримати результат і надати зворотній зв'язок, опрацювати на уроці типові помилки та надати матеріали для індивідуального коригування знань.

Доцільним на етапі повторення та систематизації шкільного курсу математики вбачаємо також використання опорних конспектів, блок-схем тощо з наведеними основними властивостями та формулами за темами, розділами або змістовими лініями. Таким чином учні матимуть перелік фактів, формул і теорем, які потрібно вивчити, спосіб самоконтролю володіння основними теоретичними викладками, а також засіб візуалізації при встановленні взаємозв'язків та аналогій.

Підсумовуючи вище наведені міркування, можна зауважити, що вибір технології навчання значною мірою залежить від часу, відведеного на процес повторення та систематизації, його місце у навчальному процесі, а також форми

проведення занять. Проте найбільш застосовуваними технологіями для реалізації особистісно-орієнтованого навчання вважаємо ІКТ, зокрема тестові платформи та застосунки, а також електронне навчання, зокрема перевернутий клас, мікронавчання та адаптивні технології. Головним недоліком виокремлених технологій є особливості доступу учасників освітнього процесу до апаратного та програмного забезпечення. Основною перевагою – можливість швидкого зворотного зв'язку та реалізації індивідуальної траєкторії навчання одночасно для групи учнів з різними навчальними потребами та когнітивними здібностями.

1.3 Засоби та організаційні форми систематизації та повторення курсу математики старшої школи

Організація систематизації та повторення як етап освітнього процесу передбачає постановку цілей, визначення змісту та вибір методів, засобів і форм навчання. Цілі вивчення курсу математики та його зміст передбачені Державним стандартом (Кабінет Міністрів України, 2024) та Навчальною програмою з математики (МОН, 2017 а-с). Вибір засобів, методів і форм навчання покладаються на вчителя відповідно до його академічної свободи.

Основними організаційними формами навчання на етапі повторення та систематизації є урок, домашня самостійна робота, факультативи та позакласна робота. За характером взаємодії та кількості учнів основними формами є: фронтальна (опитування, інтерактивна взаємодія) та індивідуальна (виконання діагностичних робіт, тренувальних вправ, онлайн тестувань). Типовими видами навчальної діяльності під час систематизації та повторення шкільного курсу математики є написання діагностичних робіт, виконання онлайн-тестувань, у тому числі в ігровому форматі, а також математичні диктанти, фронтальне опитування, колективне або самостійне розв'язування завдань тощо. Зазначені організаційні форми та види навчальної діяльності доцільно використовувати під час аудиторного або онлайн навчання у синхронному режимі, за винятком онлайн-тестувань та самостійного

розв'язування завдань, які можуть бути задані як домашня робота або винесені в асинхронний режим проведення дистанційного та змішаного навчання.

Цифровізація освіти та впровадження елементів штучного інтелекту (ШІ) зумовлюють трансформацію традиційних організаційних форм і видів навчальної діяльності. Якщо фронтальне опитування чи математичний диктант містять чітко визначений перелік запитань (перелік запитань має статичний характер), то в адаптивних навчальних платформах кожне наступне запитання переліку визначається залежно від правильності чи неправильності відповіді на попереднє (перелік запитань має динамічний характер). Цифрові інструментам асинхронного та змішаного навчання дозволяють реалізувати концепцію «перевернутого класу» на етапі повторення та систематизації. У такому контексті самостійне опрацювання теоретичного матеріалу за допомогою інтерактивних відеолекцій стає підготовчим етапом, що звільняє аудиторний час для глибинної систематизації та розв'язування багатоступінчастих складних задач.

Основними засобами навчання (у тому числі, повторення та систематизації) математики є підручники та збірники у паперовому або електронному вигляді. Тому для визначення наявних на сьогодні підходів до організації повторення та систематизації шкільного курсу математики розглянемо реалізацію цих питань у чинних підручниках з математики (алгебри та початків аналізу і геометрії) та збірниках завдань для підготовки до загальнодержавних підсумкових оцінювань, а також можливі способи та форми реалізації цих підходів у освітньому процесі.

1.3.1 Аналіз підручників з математики для старших класів на предмет матеріалів для повторення та систематизації

Розглянемо детальніше реалізацію повторення і систематизації у підручниках математики (для рівня стандарту), алгебри і початків аналізу та геометрії (для профільного рівня) для 10 та 11 класів. Відповідно до класифікації видів повторення за місцем у навчальному плані, дидактичними цілями та змістом повторюваного

матеріалу, виокремимо такі рубрики для повторення у підручниках: завдання для підготовки до вивчення нової теми, питання для самоконтролю наприкінці параграфу або пункту з вивчення нової теми; завдання на повторення раніше вивчених тем; тестові завдання наприкінці вивчення розділу; завдання на повторення курсу алгебри і початків аналізу та курсу геометрії за 10 клас чи весь курс математики для 11 класу.

У таблиці нижче наведено інформацію про наявність відповідних рубрик у підручниках з математики рівня стандарту для 10 та 11 класів (Бевз & Бевз, 2018; Бурда та ін., 2018; Істер, 2018; Мерзляк та ін., 2018e; Нелін, 2018с; Бевз & Бевз, 2019b; Істер, 2019; Мерзляк та ін., 2019с; Нелін & Долгова, 2019с).

Таблиця 1.3

Повторення у підручниках з математики для 10 та 11 класу (рівень стандарту)

<i>Автор підручника</i>	Г. Бевз		М. Бурда	О. Істер		А. Мерзляк		Є. Нелін	
	10	11	10	10	11	10	11	10	11
Завдання для підготовки до вивчення нової теми	–	–	–	+	+	+	+	–	–
Питання для самоконтролю	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Завдання на повторення раніше вивчених тем	+	+	–	–	–	+	+	–	–
Узагальнення теорії до розділу	+	+	–	–	–	+	+	+	+
Підсумковий тест до розділу	+	+	+	–	+	–	+	–	+
Підсумкове повторення в кінці року	–	+	+	+	–	+	+	–	–

Як можемо помітити, перевірка теоретичного засвоєння знань у вигляді питань для самоконтролю присутній у всіх підручниках з математики рівня стандарту для старшої школи. Також відмітимо наявність завдань на повторення протягом навчального року у підручниках трьох авторських колективів. Зокрема, у підручнику Г. Бевз та ін. запропоновані завдання для повторення раніше вивчених тем, а у підручнику О. Істера завдання на повторення наведені в якості актуалізації знань перед вивченням нової теми. Такі завдання відкритої форми вчитель може використати для домашньої роботи, або для колективної роботи на уроці, або для самостійної роботи на уроці з само- або взаємоперевіркою. У підручниках А. Мерзляка та ін. присутні завдання і для актуалізації знань перед вивченням нової

теми, і для повторення раніше вивчених тем наприкінці поточної теми. Авторами не передбачено виконання усіх завдань, у тому числі на повторення, протягом року, але надано набір завдань для вибору в залежності від освітніх цілей.

Узагальнення теорії до розділу, яке сприяє систематизації знань на етапі цілісного повторення теми/розділу представлено у підручниках В. Бевз та ін., А. Мерзляка та ін. і Є. Неліна. Підсумкові тести до розділу наведені в деяких підручниках для 10 класів і в усіх представлених підручниках для 11 класів рівня стандарту. Щодо підсумкового повторення курсу математики, тобто наприкінці 11-го класу, то підбірку відповідних завдань запропоновано лише в підручниках В. Бевз та ін. та А. Мерзляка та ін. Працюючи з іншими підручниками математики рівня стандарту підбір або розробка відповідних матеріалів залишаються за вчителем.

Розподіл рубрик на повторення у підручниках для 10 з алгебри та початків аналізу (Істер & Єргіна, 2018а; Бевз, Бевз & Владімірова, 2018; Мерзляк та ін., 2018а; Мерзляк та ін., 2018b; Нелін, 2018а) і геометрії (Єршова та ін., 2018; Бевз, Бевз, Владіміров & Владіміров, 2018; Істер & Єргіна, 2018b; Мерзляк та ін., 2018c; Мерзляк та ін., 2018d; Нелін, 2018b), а також для 11 класів з алгебри та початків аналізу (Істер & Єргіна, 2019а; Бевз & Бевз, 2019а; Нелін & Долгова, 2019а; Мерзляк та ін., 2019а) і геометрії (Істер & Єргіна, 2019b; Бурда та ін., 2019; Нелін & Долгова, 2019b; Мерзляк та ін., 2019b) наведено у таблиці 1.4 (а – підручники з алгебри та початків аналізу, б – підручники з геометрії). Зауважимо, що в 11 класі в курсі алгебри та початків аналізу для профільних класів також окремо відведено тему для повторення, узагальнення та систематизації знань зі змістової лінії «Рівняння та нерівності».

Таблиця 1.4 (а)

Повторення у підручниках з алгебри та початків аналізу (профільний рівень)

Автор підручника	Г. Бевз	О. Істер		А. Мерзляк		А. Мерзляк (погл. з 8 кл.)		Є. Нелін	
Клас	10	10	11	10	11	10	11	10	11
Завдання для підготовки до вивчення нової теми	–	+	+	+	+	–	–	–	–
Питання для самоконтролю	+	+	+	+	+	+	–	+	+
Завдання на повторення раніше вивчених тем	+	–	–	+	+	+	–	–	–
Узагальнення теорії до розділу	+	–	–	+	+	–	+	+	+
Підсумковий тест до розділу	+	–	+	–	+	–	–	+	+
Підсумкове повторення в кінці року	–	–	–	+	+	–	–	–	–

Таблиця 1.4 (б)

Повторення у підручниках з геометрії (профільний рівень)

Автор підручника	Г. Бевз	М. Бурда	А. Єршова	О. Істер		А. Мерзляк		А. Мерзляк (погл. з 8 кл.)		Є. Нелін	
Клас	10	11	10	10	11	10	11	10	11	10	11
Підготовка до вивчення нової теми	–	–	+	+	+	–	–	–	–	–	–
Питання для самоконтролю	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Повторення раніше вивчених тем	+	–	–	–	–	+	+	+	+	–	–
Узагальнення теорії до розділу	+	–	+	–	–	+	+	+	+	+	+
Підсумковий тест до розділу	+	+	+	+	+	–	+	–	–	+	+
Підсумкове повторення в кінці року	–	+	–	–	–	+	+	–	+	–	–

Як можна бачити в таблицях, у підручниках для профільних класів так само недостатньо представлені завдання для актуалізації знань перед початком вивчення нової теми та завдання для підсумкового повторення.

Відповідно до аналізу підручників з математики старшої школи, з метою використання підручника як засобу реалізації повторення раніше опанованих тем з

математики вважаємо доцільним обирати підручники В. Бевз та ін. або А. Мерзляка та ін., оскільки в них наведені відповідні типи завдань. Обираючи чинні підручники для старших класів інших авторів добирати засоби повторення раніше опанованих тем необхідно окремо з інших джерел (Tykhonenko & Shkolnyi, 2025).

Наявність завдань для підготовки до вивчення нової теми у підручниках А. Мерзляка та ін. та О. Істера дозволяє провести активне повторення на етапі актуалізації знань. Працюючи за іншими підручниками, підбірку таких завдань учителю потрібно здійснювати самостійно. Проте, навіть за наявності завдань для підготовки до вивчення нової теми, у відкритій формі, що часто передбачає колективне розв'язування, вбачаємо ризик не залучення усіх учнів. Таким чином, вважаємо доцільним реалізацію актуалізації у вигляді питань або завдань, реалізованих на тестовій (або ігровій) платформі, за допомогою якої можна одночасно бачити результати всіх учнів, тенденції щодо залишкових знань класу чи групи, миттєво надавати зворотний зв'язок та коригувати знання та навички. Оскільки розміщення завдань на платформі є більш технічною, аніж методичною задачею, то це не скасовує доцільність і зручність використання завдань, наведених у підручниках перед введенням нових понять. Тематичні підсумкові тести слугують засобом повторення та систематизації знань із вивченої теми. За відсутності таких тестів у підручниках, вбачаємо одним із можливих варіантів використання тематичних підбірок завдань із ЗНО (НМТ) з математики минулих років або зі збірників підготовки до ЗНО (НМТ) з математики.

Зважаючи на те, що підручник не є єдиним засобом навчання та підбору завдань, повторення і раніше вивчених тем, і у межах поточної теми, може бути реалізоване за використання будь-якого із пропонованих МОН комплектів підручників з математики, алгебри та початків аналізу, геометрії для 10 та 11 класів. Таким чином, стверджувати, що наявність завдань на повторення є вагомою перевагою або відсутність таких завдань – недоліком, на нашу думку, некоректно.

Особливим видом підсумкового повторення є повторення курсу математики учнями випускних класів після опанування всіх тем навчальної програми. На цьому етапі відбувається і загальна систематизація знань та вмінь з математики, наприклад

за змістовими лініями. Розглянемо детальніше методичні підходи до реалізації такого підсумкового повторення, яке може відбуватися інтегровано в освітній процес у межах навчального закладу (після опанування всіх тем навчального плану) або ж відокремлено у позашкільний час у рамках самостійної підготовки учнів до загальнодержавних стандартизованих тестувань. Оскільки завдання для підсумкового повторення наведені не в усіх чинних підручниках з математики для випускних класів, то розглянемо реалізацію цих підходів у збірниках для підготовки до ЗНО (НМТ) з математики.

1.3.2 Аналіз збірників для підготовки до ЗНО (НМТ) з математики на предмет використання їх для повторення та систематизації

Збірники з математики для підготовки до ЗНО (НМТ) можна класифікувати за типом видання та дидактичною ціллю. За типом видання зустрічаються збірники, підготовлені та видані спеціалізованим видавництвом і поширені через сайти видавництв та книгарні, а також самостійно підготовлені та поширювані через власні сайти чи соцмережі. У даній роботі будемо розглядати перший тип збірників. За дидактичною ціллю збірники можуть бути націлені на тематичне повторення шкільного курсу математики (Гальперіна та ін., 2022; Забєлишинська та ін., 2024; Захарійченко, Репета та ін., 2022; Захарійченко, Шкільний та ін., 2022; Істер, 2021; Капіносов, 2023; Клочко, 2023; Козира, 2023) або на практичне відпрацювання вмінь та навичок на комплексних тестах (Гальперіна, 2023; Мартинюк, 2025; Шкільний & Роганін, 2024, Істер, 2025). Другий тип збірників вважаємо корисним на завершальному етапі повторення або для діагностики при коригуванні плану повторення. Окремі збірники з комплексними тестами пропонують тести за структурою та типами завдань відповідні до структури іспиту конкретного року.

Збірники для тематичного повторення кожного автора чи авторського колективу мають більш сталу структуру з року в рік. Розглянемо особливості збірників, пропонованих видавництвами протягом років проведення ЗНО з математики у форматі НМТ. Зокрема, звернемо увагу на методичний підхід щодо

порядку подання тем, співвідношення розгляду алгебри та геометрії (послідовно чи паралельно), використання завдань відкритої форми для навчання та тренування чи різних завдань формату ЗНО (НМТ), використання різних типів завдань ЗНО (НМТ) з математики та відповідність їх форми сучасним вимогам до цих завдань, подання теоретичного матеріалу, прикладів розв'язання та аналогічних завдань для самостійного відпрацювання.

Збірник «Сучасна підготовка до ЗНО. Математика» (Захарійченко, Шкільний та ін., 2022) складається із десяти тематичних розділів, кожен із яких містить коротку теорію, завдання відкритої форми трьох рівнів складності та два тести із завданнями формату ЗНО, а також чотири тренувальні тести у форматі ЗНО наприкінці. Спершу передбачається розгляд семи тем алгебри (числа і вирази; функції та їх графіки; рівняння і системи рівнянь; нерівності та системи нерівностей; текстові задачі; елементи математичного аналізу), потім трьох тем геометрії (планіметрія; стереометрія; координати і вектори).

За такого тематичного розподілу систематизація і повторення відбуваються горизонтальним спіралеподібним чином. Наприклад, спершу розглядаються всі типи виразів (цілі, дробові раціональні, ірраціональні, тригонометричні, логарифмічні), потім – всі види функцій, далі – всі види рівнянь, за ними – всі види нерівностей. Таким чином, у кожному наступному розділі використовується матеріал попередніх і, відповідно, розглянутий матеріал постійно повторюється. Оскільки текстові задачі тут розглядаються після рівнянь, то цей розділ, крім навички працювати з відповідним типом задач, також дозволяє повторити та відпрацювати навички розв'язування усіх необхідних типів рівнянь.

Теми з геометрії розглядаються після всіх тем із алгебри, що дає можливість повною мірою використовувати розрахункові навички учнів на всіх множинах чисел у межах шкільного курсу математики рівня стандарту, а також. Курс геометрії займає три розділи збірника: планіметрія, стереометрія та окремо координати та вектори на площині та в просторі.

Кожен із десяти розділів містить короткий теоретичний матеріал і завдання, розбиті на 3 рівні за складністю. Теоретичні основи наведено на початку розділу у

вигляді стислого конспекту з основними формулами чи правилами. Сторінка із завданнями візуально поділена на дві колонки, у кожній із яких міститься пункт (а) ліворуч і б) праворуч) до завдання зі спільною умовою. Таким чином, усі завдання мають аналоги, що дозволяє учневі відпрацювати навички самостійно, розібравши матеріал з учителем. Розподіл завдань на умовно «класну» і «домашню» роботу, разом із відсутністю прикладів розв’язання завдань, робить його адаптованим для підготовки саме з учителем. Усі тренувальні завдання мають відкриту форму та вимагають, інколи, вимагають пояснення або обговорення, що спонукає до роботи над завданнями, а не над угадуванням відповіді. Щодо завдань у форматі ЗНО (НМТ), то вони теж присутні, у вигляді підсумкового тесту наприкінці кожного розділу. Такий тест містить завдання з вибором однієї правильної відповіді, на встановлення відповідності, з короткою відповіддю (структуроване та неструктуроване) та з розгорнутою відповіддю. Таких тестів також наведено два, що дозволяє роботу з ними також розділити на спільну та самостійну, або використати один із тестів для діагностики на початку вивчення теми, а другий – для контролю результатів навчання наприкінці повторення теми та відпрацювання навичок з неї.

Підсумок щодо структури розглянутого збірника наведено у таблиці 1.5.

Таблиця 1.5

Структурні елементи збірника «Сучасна підготовка до ЗНО. Математика»

Вид структурного елементу збірника	Форма наявності структурного елементу
Навчальні вправи відкритої форми	Основна частина завдань, рівні складності
Навчальні вправи закритої форми	Відсутні
Тематичні тести у форматі ЗНО	Як підсумок до розділу
Стислий довідковий матеріал	Перед кожним розділом, а також довідкові матеріали з ЗНО (НМТ) з математики на форзацах збірника
Розгорнутий конспект з теорії	Відсутній
Наявність прикладів розв’язання завдань	Відсутні
Аналогічні варіанти	До кожного завдання наведено аналогічні пункти а) і б), підсумкові тести теж містять два аналогічні варіанти
Чергування тем алгебри і геометрії	Послідовно
Комплексні тести форматі ЗНО	Присутні в кінці збірника

Використання даного збірника під час систематизації та повторення вбачаємо доцільним для учнів низького та середнього рівнів підготовки, які потребують послідовного повторення тем, починаючи з основ, та багаторазового повторення. Для учнів з вищим рівнем навчальних досягнень з математики, за нашими спостереженнями, такого збірника буде недостатньо, проте запропоновані комплексні тести та деякі завдання з II чи III частини розділу вчитель чи репетитор може використати для роботи і з такими учнями.

Збірник *«Математика. Комплексне видання»* (Гальперіна та ін., 2021) складається із двох частин: довідника з математики з тренувальними вправами та тестів. Друга частина містить 18 комплексних тестів у форматі ЗНО з математики. Перша частина передбачає спершу розгляд тем алгебри, потім геометрії. Змісту першої частини цього комплексного видання відповідає збірник *«Математика. Довідник-практикум»* (Забелишинська, Захарійченко & Карпик, 2024)

Розділ алгебри містить 4 теми: арифметика; алгебра та елементарні функції; елементи математичного аналізу; комбінаторика, початки теорії ймовірностей і математична статистика. Розділ геометрії містить три теми: планіметрія, стереометрія, координати та вектори. Зважаючи на те, що в межах теми «алгебра та елементарні функції» цього посібника матеріал подано по змістових лініях вирази, функції, рівняння, нерівності, то можемо помітити збіг послідовності тем із попереднім збірником. Відмінністю у виокремленні та послідовності тем є винесення до окремої теми арифметичних дій та відсутність окремої теми з текстовими задачами, які розглядаються тут у контексті арифметичних задач чи задач на розв'язання певного типу рівнянь, наприклад дробово-раціональних.

Теоретичний матеріал подається розгорнуто з використанням детальних текстових пояснень та формулювань для теорем, після також наведено приклади розв'язання завдань. Наприкінці теми пропонуються тренувальні вправи відкритої форми. Як уже було сказано раніше, комплексні тренувальні тести наведено у II частині збірника. Наприкінці збірника також є короткий математичний довідник з усіх розглянутих тем.

Підсумок щодо структури розглянутих збірників наведено у таблиці 1.6.

Таблиця 1.6 (а)

Структурні елементи збірника «Математика. Комплексне видання»

Вид структурного елементу збірника	Форма наявності структурного елементу
Навчальні вправи відкритої форми	Становлять основу всіх завдань, переважно початкового та середнього рівнів складності, але формально на рівні не поділені
Навчальні вправи закритої форми	Відсутні
Тематичні тести у форматі ЗНО	Відсутні
Стислий довідковий матеріал	Наприкінці збірника
Розгорнутий конспект з теорії	Наведено перед кожним розділом
Наявність прикладів розв'язання завдань	Наведено після розгорнутого конспекту, перед тренувальними вправами
Аналогічні варіанти	Відсутні
Чергування тем алгебри і геометрії	Послідовно
Комплексні тести форматі ЗНО	У другій частині збірника

Таблиця 1.6 (б)

Структурні елементи збірника «Математика. Довідник-практикум»

Вид структурного елементу збірника	Форма наявності структурного елементу
Навчальні вправи відкритої форми	Становлять основу всіх завдань, переважно початкового та середнього рівнів складності, але формально на рівні не поділені
Навчальні вправи закритої форми	Відсутні
Тематичні тести у форматі ЗНО	Відсутні
Стислий довідковий матеріал	Відсутній
Розгорнутий конспект з теорії	Наведено перед кожним розділом
Наявність прикладів розв'язання завдань	Наведено після розгорнутого конспекту, перед тренувальними вправами
Аналогічні варіанти	Відсутні
Чергування тем алгебри і геометрії	Послідовно
Комплексні тести форматі ЗНО	Відсутні у друкованому варіанті в збірнику, але запропоновані на сайті видавництва

На нашу думку, такий збірник може підійти для учнів із достатнім рівнем знань з математики і здатністю до самостійного опрацювання великого обсягу інформації, проте під контролем учителя сприйняття великих обсягів теоретичного викладу може спроститися, наприклад за рахунок вказівок щодо чергування теорії та практичних завдань, виокремлення основного в теорії або попередній діагностиці знань учня на предмет того, яку саме теорію потрібно додатково опрацювати. Зважаючи на те, що тренувальні вправи, як і в попередньому збірнику, відкритої форми та потребують пояснень, записів або обговорень, то вважаємо доцільним роботу з даним матеріалом під контролем учителя або зі зворотним зв'язком від нього. Для учнів із низьким рівнем навчальних досягнень з математики завдань із тренувальних вправ може бути недостатньо, оскільки вони не містять аналогічних завдань для самостійного відпрацювання, як це реалізовано у «Сучасній підготовці до ЗНО», а для учнів із високим рівнем знань недостатньо завдань підвищеної складності, наприклад рівнянь із параметрами. Вбачаємо корисним даний збірник для використання учителями під час підготовки уроків повторення та систематизації знань з математики, у тому числі в старших класах освітніх закладів, оскільки послідовність викладу тем сприяє багаторазовому повторенню, а розгорнуті пояснення та приклади можуть слугувати конспектом до уроку, у той час як короткий математичний довідник може бути взятий за основу, наприклад, для дидактичних карток чи довідкових матеріалів для учнів.

Збірник *«Математика. 2000 тестів для підготовки до ЗНО»* можна назвати практико-орієнтованим, оскільки він не містить окремих блоків теорії, а побудований повністю на завданнях усіх типів, які зустрічалися в ЗНО з математики та зустрічаються на НМТ. Кожна математична ідея відпрацьовується у збірнику на трьох задачах: розв'язана задача-приклад із поясненням та необхідними виносками з формулами чи теоретичними основами саме під цю задачу та дві задачі для самостійного розв'язання, перша із яких подібна до задачі-прикладу, а друга має певні ускладнення, але часто має також вказівки до розв'язання, якими учень може скористатися під час самостійної роботи (Захарійченко, Репета, Маркова & Карпик, 2021).

Послідовність вивчення тем у цьому збірнику подібна до попередніх і забезпечує повторення програми з математики по основних змістових лініях. З відмінностей те, що основи математичного аналізу об'єднані з темою функцій і є її логічним продовженням, рівняння та нерівності розглядаються раніше функцій, координати та вектори не виносяться в окрему тему, а є частиною тем планіметрії та стереометрії. Таким чином, посібник поділений на 6 тем: числа і вирази; рівняння, нерівності та їх системи; функції; елементи комбінаторики, початки теорії ймовірностей та елементи статистики; планіметрія; стереометрія. Крім того, збірник містить три розділи за типами завдань: завдання з вибором однієї правильної відповіді та завдання на встановлення відповідності; структуровані завдання з короткою відповіддю; завдання з короткою та з розгорнутою відповіддю. Такий розподіл сприяє, по-перше, навчанню не лише розв'язувати задачі, але і працювати зі специфічними для тестування типами завдань, а, по-друге, забезпечує додатково повторення у кілька кіл. Така повторюваність може сприяти, як уже згадувалося раніше, кращому засвоєнню матеріалу учнями з нижчим рівнем математичних досягнень, а також, на мою думку, запобігає втомлюваності учнів з різними рівнями знань від одноманітності і тем, і видів завдань, привчає їх переключатися між темами, що поступово готує до роботи із комплексним тестом.

Підсумок щодо структури розглянутого збірника наведено у таблиці 1.7.

Таблиця 1.7

Структурні елементи збірника «2000 тестів для підготовки до ЗНО»

Вид структурного елементу збірника	Форма наявності структурного елементу
Навчальні вправи відкритої форми	Відсутні
Навчальні вправи закритої форми	З однією правильною відповіддю та на встановлення відповідності
Тематичні тести у форматі ЗНО	Відсутні
Стислий довідковий матеріал	Наведено до завдань як довідковий матеріал, нагадування або вказівка до дії
Розгорнутий конспект з теорії	Відсутній
Наявність прикладів розв'язання завдань	Задачі-приклад, до яких наведено аналогічну та подібну ускладнену задачу

Вид структурного елементу збірника	Форма наявності структурного елементу
Аналогічні варіанти	У якості аналогічного до задачі-прикладу завдання для самостійного виконання
Чергування тем алгебри і геометрії	Послідовно
Комплексні тести форматі ЗНО	Відсутні

На нашу думку, такий посібник може бути використаний учнями і для самостійної повторення шкільного курсу математики та відпрацюванню навичок, оскільки наведені і приклади розв'язування, і завдання для самостійної роботи, і вказівки та виноска теорії. Як зазначають автори збірника, даних завдань може бути достатньо для підготовки до складання іспиту на «пороговий бал» і більш високого результату (Захарійченко, Репета та ін., 2022). Щодо складання іспиту на високі бали або повторення та систематизації курсу математики поглибленого та профільного рівня, то, на нашу думку, тут недостатньо завдань, зокрема з текстовими задачами чи рівняннями із параметрами.

Як один із засобів реалізації повторення та систематизації курсу математики під контролем учителя, у тому числі в ЗЗСО, цей посібник може допомогти вчителю забезпечити індивідуальний підхід до кожного учня, розподіливши задачі між ними залежно від рівня їх підготовки. За рахунок наведених прикладів і аналогічних задач для самостійної роботи, кожен учень може самостійно працювати із завданнями відповідно до свого рівня, умінь та навичок, а роль учителя в такому випадку полягає у виявленні освітніх потреб учня, коректному підборі завдань та консультуванні під час уроку.

Збірник *«Математика: комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання»* складається із 38 тем, які містять теоретичні відомості, приклади розв'язання завдань та завдання для самостійного опрацювання, і двох тренувальних тестів у форматі ЗНО. Автор передбачає, що теоретичну частину учні можуть опрацьовувати як з учителем, так і самостійно, проте над практичною частиною будуть працювати під контролем учителя (Істер, 2021).

У даному збірнику спершу представлено 24 теми з алгебри, потім 14 тем геометрії. На відміну від попередніх збірників, де повторення відбувається по

змістових ліній, у цьому збірнику порядок тем зумовлений послідовністю вивчення тем за шкільною програмою, за винятком хіба що місця теми «Похідна функції та її застосування», яка тут запропонована після вивчення показникової та логарифмічної функцій. У межах кожної теми відбувається поділ на короткі пункти (параграфи) з розписаною теорією та прикладами, а також зразками розв'язування завдань із зазначенням типу завдання (з вибором однієї правильної відповіді, на встановлення відповідності, відкритої форми з короткою відповіддю (структуроване, неструктуроване), відкритої форми з розгорнутою відповіддю). Також у межах кожної теми є один або декілька тренувальних тестів, які представлені у двох подібних варіантах.

Підсумок щодо структури розглянутого збірника наведено у таблиці 1.8.

Таблиця 1.8

Структурні елементи збірника «Математика: комплексна підготовка ...»

Вид структурного елементу збірника	Форма наявності структурного елементу
Навчальні вправи відкритої форми	Структуровані та неструктуровані відповідно до форм завдань, передбачених на ЗНО з математики
Навчальні вправи закритої форми	З однією правильною відповіддю та на встановлення відповідності
Тематичні тести у форматі ЗНО	Складаються із навчальних вправ різних форм
Стислий довідковий матеріал	Відсутній
Розгорнутий конспект з теорії	Наведено до кожної теми
Наявність прикладів розв'язання завдань	Приклади у межах теоретичних викладок до кожної теми, а також зразки розв'язування завдань різних форм з теми
Аналогічні варіанти	Присутні: кожна вправа представлена у варіантах А та Б
Чергування тем алгебри і геометрії	Послідовно
Комплексні тести форматі ЗНО	Присутні

У зверненні до вчителів автор зазначає про доцільність опрацювання тесту А на уроці, а тест Б пропонувати у якості домашньої роботи (Істер, 2021). Такий підхід доцільний, на нашу думку, для учнів початкового та середнього рівня знань або ж для учнів достатнього та високого рівня, але з окремих тем, де у них виникають

складності. Також для учнів із достатнім та високим рівнями пропонувані тести можна використовувати у якості діагностики знань із теми, аби розуміти, чи варто зупинитися на ній і наскільки детально. У випадку потреби розглянути тему, другий із тестів може бути використаний для контролю знань і порівняння з діагностичним для аналізу успішності. Отже, даний посібник може бути використаний для повторення курсу математики учнями різного рівня підготовки як основний засіб або як один із інструментів. За допомогою поданої теорії та прикладів у збірнику, вчитель має можливість диференціювати учнів у групі чи класі за рівнем підготовки та запропонувати відповідний формат роботи з матеріалами збірника.

У збірнику *«Математика: зовнішнє незалежне оцінювання: навчально-методичний посібник»*, пропонується модульно-компетентнісний підхід до підготовки учнів випускних класів та абітурієнтів до ЗНО (НМТ) з математики. Посібник складається з 14 модулів, кожен із яких містить перелік компетентностей, довідковий матеріал, методичні рекомендації щодо розв'язування завдань, тематичний путівник, тестові завдання ЗНО з математики 2010-2021 років та деякі інші нестандартні завдання (Козира, 2023).

Теми алгебри та геометрії в даному збірнику також наведені послідовно. Перші 11 модулів відведені на алгебру: дійсні числа та алгебраїчні вирази; алгебраїчні рівняння та їх системи; алгебраїчні нерівності та їх системи; текстові задачі; алгебраїчні функції; показникова та логарифмічна функції; тригонометрія; похідна функції, первісна, інтеграл; інтегровані та структуровані завдання з алгебри і початків аналізу; елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики; задачі з параметрами. Можна помітити розбиття тем на модулі за основними змістовими лініями для середньої школи і окремо розгляд тем старшої школи. Також характерно, що алгебраїчні функції розглядаються після відповідних рівнянь та нерівностей, завдання з параметрами та інтегровані завдання винесені в окремі модулі, а задачі на прогресії віднесено до текстових задач, а не початків математичного аналізу. Решта три модулі відведені на геометрію: планіметрія; стереометрія; координати та вектори.

Як було зазначено, кожен модуль починається із переліку компетентностей, що є орієнтиром для очікуваних результатів після опрацювання модуля. Довідковий матеріал містить розгорнутий конспект до розділу та приклади виконання дій та розв'язання прикладів і задач. У методичних рекомендаціях щодо розв'язування завдань наводяться основні орієнтири та алгоритми до основних типів завдань та приклади їх виконання. Характерним для даного збірника тематичний путівник перед тестовими завданнями, у якому прописано номери завдань до кожної із тем у кожній із частин. Такий тематичний путівник може спростити підготовку вчителю до уроку повторення, а також організувати учню самостійну роботу з посібником.

Тестові завдання у межах кожного модуля розділено на три частини: завдання з вибором однієї правильної відповіді, на встановлення відповідності та завдання відкритої форми. Зауважимо, що більшість із запропонованих завдань взяті із минулорічних завдань ЗНО з математики, проте містяться і авторські задачі. Використання завдань із сесій ЗНО із зазначенням року та сесії, надає можливість вмотивованому та організованому учню самостійно працювати з тестами, розбираючи проблемні завдання за допомогою відео викладачів на стримінгових платформах та офіційних відповідей до відповідних сесій ЗНО.

Після всіх модулів у збірнику наведено два підсумкові тренажери (один із алгебри та початків аналізу, інший – з геометрії) та два приклади сертифікаційної роботи, що відповідають змісту зошитів ЗНО з математики.

Підсумок щодо структури розглянутого збірника наведено у таблиці 1.9.

Структурні елементи збірника «Математика: зовнішнє незалежне оцінювання»

Вид структурного елементу збірника	Форма наявності структурного елементу
Навчальні вправи відкритої форми	Завдання відкритої форми з минулорічних варіантів ЗНО з математики, переважно завдання достатнього та високого рівня складності
Навчальні вправи закритої форми	Переважно завдання з минулорічних варіантів ЗНО з математики
Тематичні тести у форматі ЗНО	Наприкінці збірника підсумковий тренажер окремо з алгебри, окремо з геометрії (переважно завдання минулорічних варіантів ЗНО з математики)
Стислий довідковий матеріал	Довідкові матеріали відповідно до тих, які надаються на ЗНО (НМТ) з математики
Розгорнутий конспект з теорії	На початку кожного розділу
Наявність прикладів розв'язання завдань	Присутні, зокрема приклади розв'язування деяких завдань зі ЗНО минулих років
Аналогічні варіанти	Відсутні
Чергування тем алгебри і геометрії	Послідовно
Комплексні тести форматі ЗНО	Два приклади сертифікаційної роботи, укладені із завдань минулорічних ЗНО з математики

Зважаючи на те, що більшість із представлених завдань взяті з минулорічних ЗНО з математики, які також опубліковані на багатьох онлайн-платформах, у тому числі з розподілом на теми, вбачаємо доцільність використання збірника вчителями та репетиторами під час підготовки до уроків повторення та систематизації за допомогою наведених методичних рекомендацій та тематичних путівників. З цієї ж причини, а також з причини наявності розгорнутої теорії і прикладів, вважаємо ефективним і самостійну роботу учнів із цим посібником, особливо якщо ці учні мають достатній або високий рівень навчальних досягнень з математики. В учнів із низьким та середнім рівнем математичної підготовки під час самостійної роботи можуть виникати складності під час роботи із завданнями деяких розділів, наприклад із задачами з параметрами. Тому для таких учнів вважаємо необхідною постійну консультацію із викладачем щодо порядку опрацювання тем та розбору проблемних завдань.

Збірник «*Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА*» складається із 44 тем, кожна з яких містить довідковий теоретичний матеріал і зразки розв'язання вправ та тестові завдання трьох форм: з вибором однієї правильної відповіді, на встановлення відповідності та відкритої форми з короткою відповіддю (Капіносов, 2023).

У цьому збірнику також спершу подаються теми з алгебри (28 тем), а потім теми з геометрії (16 тем). Темы з алгебри розподілені за основними змістовими лініями: спершу арифметичні обчислення, потім вирази: цілі, дробово-раціональні, ірраціональні, логарифмічні та показникові, тригонометричні; потім у такому ж порядку рівняння та нерівності та лише потім функції; початки математичного аналізу; елементи комбінаторики, теорії ймовірностей і статистики. Звісно, що розгляд функцій після рівнянь та нерівностей обмежує використання методів їх розв'язування, проте, наприклад, графічний метод можливо розглянути саме при повторенні функцій. Порядок тем з геометрії переважно збігається із порядком їх вивчення за шкільною програмою.

Кожна тема в обох частинах (алгебра та геометрія) складається з переліку програмового матеріалу і компетентностей, короткого викладу матеріалу, прикладу розв'язання задач і завдань для самостійного розв'язування. Завдання для самостійного розв'язування представлені у форматі ЗНО і поділені, відповідно, на три частини: завдання з вибором однієї правильної відповіді (подані в порядку збільшення складності), завдання на встановлення відповідності, завдання відкритої форми (без розподілу на завдання з короткою і завдання з розгорнутою відповіддю, але з вмістом завдань із параметром). У кінці збірника пропонуються два тренувальні тести у форматі ЗНО.

Підсумок щодо структури розглянутого збірника наведено у таблиці 1.10.

Структурні елементи збірника «Математика. Комплексна підготовка до ЗНО»

Вид структурного елементу збірника	Форма наявності структурного елементу
Навчальні вправи відкритої форми	Вкінці завдань до розділу, переважно достатнього та високого рівня
Навчальні вправи закритої форми	Основна частина завдань до розділу
Тематичні тести у форматі ЗНО	Навчальні вправи подані у формі завдань, характерних для ЗНО (НМТ) з математики
Стислий довідковий матеріал	Відсутній
Розгорнутий конспект з теорії	На початку розділу
Наявність прикладів розв'язання завдань	Після теорії, перед тренувальними вправами
Аналогічні варіанти	Відсутні
Чергування тем алгебри і геометрії	Послідовно
Комплексні тести форматі ЗНО	Присутній наприкінці збірника

Зауважимо, що в збірнику завдання подаються без аналогів, тому робота з ним буде доцільною для учнів з достатнім і високим рівнем підготовки, котрі потребують лише систематизації та практичного напрацювання навичок. Для учнів нижчого рівня математичної підготовки завдання і формат збірника, за нашими спостереженнями, є складним, їм також бракує завдань для самостійної роботи, оскільки аналогічних до розібраних не наведено, а самостійно впоратися з новими для них буває важко.

Збірник «Математика. Тестові завдання» (Клочко, 2023) складається із чотирьох частин: перші дві – алгебра, третя і четверта – геометрія (планіметрія і стереометрія, відповідно). Теми з алгебри розділені на 37 уроків у двох частинах. Перша частина містить у собі 17 тем, пов'язаних із числовими множинами і виразами, діями над числами, відсотками і пропорціями, а також цілими, дробово-раціональними, ірраціональними виразами, рівняннями і нерівностями та їх системами; у другій частині розглядаються алгебраїчні функції та їх графіки, а також тригонометрія (за «вертикальною» схемою), показникові, а потім і логарифмічні вирази, рівняння та нерівності, початки математичного аналізу і елементи комбінаторики, теорії імовірності й статистики. Теми з геометрії представлені у

порядку їх вивчення у шкільному курсі математики рівня стандарту, зокрема представлено 22 теми планіметрії та 11 тем зі стереометрії.

Автор пропонує працювати з першою частиною алгебри у першому семестрі підготовки і другою частиною алгебри – у другому. Третю і четверту частини, тобто геометрію, автор також пропонує розділяти на два семестри підготовки, зокрема перший семестр працювати з третьою частиною, тобто планіметрією, а другий – з четвертою частиною, тобто стереометрією (Клочко, 2023). Таким чином, у контексті даної методики, учні працюють з алгеброю і геометрією паралельно у кожному із семестрів протягом року повторення та систематизації.

Кожна частина посібника складається із двох структурних частин: тестових завдань і довідника. Довідник, у свою чергу, містить розгорнутий конспект із теоретичними викладками та прикладами розв'язання завдань до кожної із тем, а також вкінці короткий довідник основних формул. Перша частина представлена тестами відповідно до тем, а також тестами на повторення. На кожную з тем пропонується два варіанти тренувальних вправ (А і Б), які за задумом автора є рівносильними. Це робить зручним збірник для роботи з учителем, під контролем якого опрацьовується варіант А, а аналогічний тест Б учень виконує самостійно, наприклад у якості домашнього завдання. У межах кожного із тестів представлені завдання різних форм (з однією правильною відповіддю, на встановлення відповідності, відкритої форми з короткою або розгорнутою відповіддю), зокрема і завдання із минулорічних тестів ЗНО з математики. Крім того, між основних тематичних тестів, у збірниках містяться тести на повторення попередніх, раніше опрацьованих, тем.

Щодо диференціації завдань за складністю, то автор відмічає, що вони подаються за трьома градаціями, де до першого відносить завдання з вибором однієї правильної відповіді, до другого – завдання на встановлення відповідності, до третього – завдання відкритої форми (Клочко, 2023). На нашу думку, такий розподіл складності завдань відповідно до їх форми не є доцільним, оскільки в рамках кожної із форм зустрічаються різнорівневі за складністю завдання як у сертифікаційній роботі, так і в завданнях самого збірника.

Підсумок щодо структури розглянутого збірника наведено у таблиці 1.11.

Таблиця 1.11

Структурні елементи збірника «Математика. Тестові завдання»

Вид структурного елементу збірника	Форма наявності структурного елементу
Навчальні вправи відкритої форми	Вкінці завдань до розділу, переважно достатнього та високого рівня
Навчальні вправи закритої форми	Основна частина завдань до розділу
Тематичні тести у форматі ЗНО	Тематичні навчальні тести, а також тести на повторення подані у формі завдань, характерних для ЗНО (НМТ) з математики
Стислий довідковий матеріал	Опорні конспекти з геометрії у 3 і 4 частині
Розгорнутий конспект з теорії	Окрема структурна одиниця кожної частини збірника, розміщена після всіх тематичних тренувальних тестів
Наявність прикладів розв'язання завдань	У частині з довідковими матеріалами після теоретичних викладок у межах кожної теми
Аналогічні варіанти	Усі тематичні тести представлені у двох відносно рівносильних варіантах
Чергування тем алгебри і геометрії	Може відбуватися послідовно, може паралельно, оскільки матеріал розбито по окремих збірниках
Комплексні тести форматі ЗНО	Відсутні, проте наявні тести на повторення раніше опрацьованих тем

На нашу думку, даний набір посібників може підійти учням різного рівня підготовки, але буде більш ефективним за умови роботи з учителем, оскільки теорія подана відокремлено від практики, містить частково інформацію, що виходить за межі програми з математики рівня стандарту, а також у збірнику міститься значна кількість завдань, яку за рік опрацювати учню складно, зважаючи на опанування нових тем під час навчального процесу в закладі освіти. Тому важливо, щоб траєкторію повторення та систематизації знань і навичок за допомогою зазначеного набору збірників визначав учитель, зважаючи на рівень математичної підготовки учня та його здатність до самостійного навчання.

Наведений перелік збірників не є вичерпний, а їх різноманіття постійно змінюється. У нашому дослідженні ми розглянули деякі з наявних нині збірників, різних за своєю структурою. Порівняльний аналіз розглянутих збірників та

посібників для підготовки до ЗНО (НМТ) з математики, а отже, і повторення та систематизації шкільного курсу математики, наведено у таблиці 1.12.

Таблиця 1.12

Порівняння збірників для підготовки до ЗНО (НМТ) з математики

	1	2	3	4	5	6	7	8
Навчальні вправи відкритої форми	+	+	–	+	+	+	+	+
Навчальні вправи закритої форми	–	–	+	+	+	+	+	–
Тематичні тести у форматі ЗНО	+	–	–	+	+	+	+	–
Стислий довідковий матеріал	+	+	біля завдань	–	+	–	з геометрії	–
Розгорнутий конспект з теорії	–	+	–	+	+	+	+	+
Наявність прикладів розв’язання завдань	–	+	+	+	+	+	+	+
Аналогічні варіанти	+	–	+	+	–	–	+	–
Чергування тем алгебри і геометрії	Послі- довно	Послі- довно	Послі- довно	Послі- довно	Послі- довно	Послі- довно	Пара- лельно	Послі- довно
Комплексні тести у форматі ЗНО	+	+	–	+	+	+	–	На сайті

- 1) Ю. Захарійченко, Школьний, Л. Захарійченко & Школьна, 2022,
- 2) Гальперіна, Забелишинська, Ю. Захарійченко, Карнік & Школьний, 2022,
- 3) Ю. Захарійченко, Репета, Маркова & Карнік, 2022, 4) Істер, 2021,
- 5) Козира, 2023, 6) Капіносов, 2023, 7) Клочко, 2023,
- 8) Забелишинська, Захарійченко & Карнік, 2024

Отже, як можемо зауважити із таблиці, у більшості збірників теми алгебри та геометрії подаються послідовно, а наприкінці присутні завдання у форматі сертифікаційної роботи або є покликання на проходження такого тесту на сайті видавництва. Деякі автори обирають підхід підготовки на завданнях відкритої форми, намагаючись уникнути заміни навчання угадуванням відповідей, а деякі дотримуються стратегії підготовки саме на завданнях формату ЗНО. Більшість збірників містить розгорнутий виклад теорії, деякі з них – зручний короткий

довідковий матеріал. Також у більшості посібників наводяться приклади розв'язання завдань, хоча таким прикладом для учня можуть бути і варіанти, розв'язані спільно з учителем по тих збірниках, які містять аналогічні варіанти завдань.

На нашу думку, жоден із наведених посібників не забезпечує повною мірою диференційовану самостійну підготовку для учнів різних рівнів навчальних досягнень з математики, через що розглянуті матеріали можуть стати ефективним інструментом під час повторення та систематизації лише за активної участі вчителя. На етапі повторення та систематизації знань, умінь і навичок з математики основна роль учителя полягає у якісній діагностиці знань учня та ефективному підборі засобів навчання і повторення, запропонованих на освітньому ринку, кількість яких з кожним роком лише збільшується.

Зокрема, для учнів із низьким та середнім рівнем навчальних досягнень з математики вважаю доцільним почати підготовку під контролем учителя зі збірниками, де подаються аналогічні варіанти. Наприклад, «Сучасна підготовка до ЗНО. Математика» (Захарійченко, Шкільний та ін., 2022) або «Математика: комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання» (Істер, 2021). Для опрацювання окремих питань або типів завдань може бути доцільним запропонувати на самостійне опрацювання завдання зі збірника «Математика. 2000 тестів для підготовки до ЗНО» (Захарійченко, Репета та ін., 2022), де наводиться приклад розв'язання завдання та пропонується аналогічне для самостійного опрацювання. Завдання з даного збірника також зручно використовувати на уроці з групою учнів для їх самостійної роботи відповідно до індивідуальних навчальних потреб, а також при організації навчального процесу за технологією перевернутого класу, коли учні самостійно опрацьовують завдання за задачами-прикладом і готують запитання по них до заняття з учителем. При цьому на уроці під контролем учителя можуть опрацьовуватися завдання вищого рівня, взяті зі збірників Капіносова, Клочка, Козири або з сайтів (платформ), де публікуються завдання минулорічних сесій ЗНО (НМТ) з математики.

Завдання зі збірників «Математика. Комплексне видання» (Гальперіна та ін., 2022) і «Математика. Довідник-практикум» (Забелишинська, Захарійченко &

Карпик, 2024), на нашу думку, можуть бути використані для учнів з початковим або середнім рівнем знань для ознайомчого опрацювання теми з учителем, а далі підкріплюватися практичним розв'язуванням завдань або з варіантів ЗНО та НМТ з математики минулих років, або зі збірника «Математика. Тестові завдання» (Клочко, 2023), який містить велику кількість тестових завдань різного рівня складності, що дозволяє складати підбірки завдань відповідно до рівня учня. Альтернативним варіантом самостійного відпрацювання учнями спільно розглянутих завдань може бути складання учителем подібних завдань, у тому числі засобами штучного інтелекту.

Для учнів достатнього та високого рівня знань завдання зі згаданих збірників можуть слугувати засобом уточнення ключових понять на елементарних завданнях. У якості завдань достатнього та високого рівня можна використати завдання, запропоновані в інших збірниках, наприклад «Математика. Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА» (Капіносов, 2023). Для тематичного відпрацювання проблемних тем можна, знову таки, обрати збірник І. Клочка через наявність великої кількості завдань різних форм у ньому. Також розглянуті теми вважаю доцільним підкріпити розв'язуванням завдань з варіантів ЗНО минулих років, взятих із сайту УЦОЯО, тестових платформ або збірників, зокрема В. Козири. Загалом згаданий збірник: «Математика: зовнішнє незалежне оцінювання: навчально-методичний посібник» (Козира, 2023) вбачаємо доцільним використовувати як доповнення до основної стратегії підготовки учнів, які починають повторення та систематизацію не з високого рівня знань. Використання завдань минулорічних тестів ЗНО (НМТ) з математики вбачаю слушним з тренувальною, а не навчальною метою, тому одразу їх можна пропонувати учням із високим рівнем знань, але для учнів з низьким і середнім рівнем вважаю необхідним попередньо провести повторення на окремих тематичних підбірках завдань відкритої форми, починаючи від найпростіших і поступово нарощуючи складність.

Для основної траєкторії повторення, все таки, вважаємо доцільним обрати ті збірники, де теми структуровані за змістовими лініями та мають по два варіанти, або ж адаптувати обраний збірник під зазначені умови. Реалізація повторення по

змістових ліній дає змогу узагальнювати вивчені математичні поняття та приводити набутий обсяг знань та навичок у структуровану систему.

Підсумовуючи міркування, наведені у пункті 1.3 даної роботи, можемо зазначити, що сучасні організаційні форми та види навчальної діяльності під час систематизації та повторення спираються на традиційні підходи, проте видозмінюються за рахунок, зокрема, цифровізації в освіті. Це дозволяє їм бути гнучкими й адаптивними для побудови індивідуальної траєкторії здобувачів освіти. Основними засобами навчання математики залишаються підручники та посібники в паперовому та електронному форматі. Розглянуті в підпункті 1.3.1 чинні підручники з математики для старших класів містять завдання для повторення та систематизації в різних формах та різному обсязі. На нашу думку, на етапі підсумкового повторення та систематизації варто використовувати додаткові засоби, крім підручника. Одним із варіантів такого доповнення можуть слугувати збірники для підготовки до ЗНО (НМТ) з математики. Розглянувши деякі з таких збірників у пункті 1.3.2, ми вважаємо, що жоден з них не є універсальним інструментом, а вибір залежить від рівня навчальних досягнень з математики та когнітивних особливостей здобувачів освіти, для яких ці збірники будуть використовуватися.

1.4 Психолого-педагогічні передумови повторення та систематизації шкільного курсу математики з використанням сучасних технологій навчання в освітньому процесі для учнів старшого підліткового віку

У даній роботі ми розглядаємо повторення та систематизацію курсу математики учнями старшої профільної школи, чия вікова категорія відповідає періоду ранньої юності. Рання юність (15–17 років) – це період інтенсивного формування світогляду та переходу до теоретичного мислення вищого рівня. У цьому віці провідною діяльністю стає навчально-професійна діяльність, спрямована на самовизначення та підготовку до дорослого життя (Слепкань, 2004). Відповідно, засоби, методи і форми навчання повинні відповідати сучасним викликам освіти та ринку праці. Попри те, що сучасні методи навчання не варто ототожнювати виключно з цифровізацією,

використання комп'ютерів чи інших гаджетів, програмних засобів, ІІІ тощо – є невід'ємною складовою освітнього процесу, оскільки ці засоби будуть також частиною побуту та майбутньої професійної діяльності старшокласників.

Центральним у формуванні свідомості в цей період стає «відкриття власного Я», усвідомлення своєї унікальності та життєвих планів (Steinberg, 2020). Саме тому вважаємо, що освітній процес для учнів старших класів має формувати не лише наскрізні та предметні компетентності, але й сприяти їх професійному самовизначенню. У контексті вивчення математики, основним профорієнтаційним інструментом вбачаємо систему задач прикладного змісту. Пріоритетними за сюжетним змістом можуть бути задачі відповідно до обраного профілю, але вважаємо, що не варто обмежуватися лише ними. З огляду на це виникає потреба у розробці широкої бази завдань прикладного характеру, можливо, подібних з математичної точки зору, проте різних за змістом сюжету. Таким чином, у вчителя буде можливість адаптувати освітній процес під потреби конкретного класу чи учня, сприяти їх професійному самовизначенню, а також підвищити мотивацію здобувачів освіти до вивчення математики.

До загальних психолого-педагогічних особливостей періоду ранньої юності належать також інтелектуалізація процесів (перехід до більш абстрактного мислення, що враховано в змісті програми з математики для старших класів (МОН, 2017 а-с)) та зміна пріоритетів від спілкування з однолітками (характерно для підліткового віку) до пошуку свого місця в соціумі та вибору професії (Piaget, 1950, Erikson, 1968). Це безпосередньо впливає на шляхи формування мотивації до навчання. Якщо в підлітковому віці одним із засобів мотивації до вивчення, зокрема, математики можуть бути групові та ігрові форми навчання, які сприяють комунікації з однолітками, то на етапі ранньої юності цього недостатньо. Основною мотивацією для старшокласників є візія того, для чого їм ці знання, вміння та навички потрібні. Попри те, що мислення учнів стає більш абстрактним, вони все ще можуть мати труднощі з баченням далекої перспективи через брак життєвого досвіду. Тому одним із завдань учителя є проілюструвати горизонти застосування предметних компетентностей, які здобуваються.

На особливості вивчення математики в старших класах впливають когнітивний та мотиваційний аспекти. З когнітивної точки зору у старшокласників завершується формування формально-операційного мислення (за Ж. Піаже). Це дозволяє їм: будувати логічні ланцюжки без опори на наочність, розуміти структуру доведення теорем як єдину систему, працювати з багатовимірними об'єктами (стереометрія) та граничними значеннями (початки аналізу). Ці особливості відображені в програмі з математики старших класів, коли детальніше розглядається стереометрія та починається вивчення початків математичного аналізу.

Важливим чинником ефективності повторення та систематизації в цей період є врахування кліпового мислення (як особливості сприйняття інформації сучасними «цифровими аборигенами») та водночас розвиток здатності до тривалої концентрації на складних математичних об'єктах (Жукова та ін., 2023). Поняття кліпового мислення пов'язано, зокрема, із постійним використанням гаджетів сучасними поколіннями з дитинства. Боротися з цим фактором у старших класах, за нашими спостереженнями, досить складно, тому вважаємо доречним вибір іншої стратегії: навчити учнів використовувати сучасні цифрові технології як помічника для навчання і розвитку, а не як відволікаючий фактор. Оскільки для старшокласників властиве прагнення до автономії, використання сучасних засобів навчання, таких як адаптивні навчальні платформи та ШІ-тьютори, дозволяє реалізувати суб'єкт-суб'єктну модель навчання. У такому форматі учень перестає бути пасивним отримувачем знань і стає активним архітектором власної траєкторії повторення. Дослідження в галузі нейродидактики та когнітивістики підтверджують, що залучення мультимедійних засобів та інтерактивних динамічних моделей активізує різні зони кори головного мозку, сприяючи кращому закріпленню абстрактних концепцій математичного аналізу та стереометрії (Oakley, 2014; Sigman, 2017). Це відповідає когнітивній потребі учнів раннього юнацького віку в ілюстрації складних логічних конструкцій, які вони вже здатні досягнути теоретично.

Також під час навчання математики важливо враховувати, що забування та збереження інформації в пам'яті підпорядковані психологічним і нейробіологічним закономірностям. Швидкість забування нової інформації з часом відображає крива

Еббінгауза, відповідно до якої найбільша втрата інформації відбувається в перші години та дні після вивчення. Без повторення вже за першу добу втрачається до 40-60% нових знань (Ebbinghaus, 1885; Xu & Zhang, 2025). Ця закономірність підкреслює важливість поточного повторення та самостійної роботи учнів вдома, оскільки це дозволяє скоротити обсяг втрати інформації за першу добу після вивчення. Якщо здобуті знання, уміння та навички з математики не застосовується на практиці, нейронні зв'язки слабшають, і відбувається згасання знань через невикористання (Baddeley, Eysenck & Anderson, 2020). Для сприяння збереженню математичної інформації в довготривалій пам'яті корисним є застосування інтервального (розподіленого) повторення. Відповідно до цієї концепції перше повторення варто здійснювати через 15-30 хвилин після вивчення, друге – через 1-2 години, третє – через добу, четверте – через 3-5 днів, п'яте – через 2-3 тижні, далі – через кілька місяців (Ebbinghaus, 1885; Xu & Zhang, 2025).

Також дієвими інструментами переведення математичних знань із короткочасної та робочої пам'яті до довготривалої є: смислова інтеграція, активне відтворення, варіативність та перемішування, візуалізація та кодування. Смислова інтеграція передбачає розуміння логіки виведення формул замість заучування кінцевої формули, а також послідовність вивчення тем так, щоб нові знання логічно «нанизувалися» на попередні. Активне відтворення під час вивчення математики передбачає практику розв'язування задач учнями, адже вивчити теорію або переглянути готові приклади розв'язань недостатньо для того, аби сформувати міцні знання та навички. Варіативність та перемішування стосуються переважно етапів застосування знань, умінь і навичок та узагальнення і систематизації. Передбачається, що замість великої кількості однотипних задач ефективніше перемішувати завдання різних тем. Візуалізація та кодування допомагають унаочнити абстрактні математичні поняття. Для цього застосовують побудову графіків, схем, таблиць, діаграм тощо (Oakley, 2014; Brown, Roediger & McDaniel, 2014).

З мотиваційної точки зору, навчання стає вибіркоким. Якщо здобувач освіти не бачить зв'язку математики зі своєю майбутньою професією, мотивація зазвичай падає. Позитивним з методичної точки зору вирішенням питання мотивації є

встановлення зв'язків між змістом курсу математики та професійним самовизначенням учнів, проте інколи єдиною доступною для учня мотивацією залишається суто прагматичне прагнення до задовільних для нього балів з математики та іспитах. Тому аспект підготовки до іспитів, зокрема загальнодержавних стандартизованих оцінювань, на нашу думку, теж варто враховувати на етапі повторення та систематизації курсу математики в старшій профільній школі, але не робити його центральним мотиваційним фактором.

Психологічна готовність до складання загальнодержавних стандартизованих іспитів (ДПА, ЗНО/НМТ) також вимагає особливого підходу. Надмірний акцент на процедурі тестування може призвести до зростання математичної тривожності, що негативно впливає на когнітивні функції (Barroso, C., et al. 2021). Відтак, організаційні форми повторення мають містити елементи психологічного розвантаження та формувати в учнів навички саморегуляції та метакогніції, тобто здатності усвідомлювати власні стратегії мислення, виявляти типові помилки та самостійно їх коригувати.

Основними способами подолання математичної тривожності виокремлюють: 1) формування позитивного ставлення до помилок (когнітивна переорієнтація); 2) використання ІКТ як «емоційного буфера»; 3) метакогнітивні стратегії та саморегуляція; 4) зміна комунікативної моделі «Вчитель – Учень» на суб'єкт-суб'єктну взаємодію; 5) прагматизація та контекстуальність знань (Михайленко та ін., 2024; Таточенко & Гаран, 2025). Розглянемо ці способи детальніше.

Когнітивна переорієнтація передбачає, що помилка має розглядатись не як показник некомпетентності, а як необхідний етап пізнання. Для цього доцільно використовувати «аналіз хибних шляхів», відповідно до якого замість простого виправлення помилки, вчитель пропонує учням проаналізувати, до якого логічного висновку могла би призвести ця помилка. Це знімає страх перед неправильною відповіддю. У контексті формування позитивного ставлення до помилок вважаємо важливим змістити фокус із контрольної функції оцінювання на діагностичну, тобто надавати зворотний зв'язок щодо виконання завдань без відображення оцінки в журналі. Такий підхід забезпечує психологічний комфорт учня, оскільки помилка

перестає бути загрозою для академічного статусу, а стає точкою зростання. Це трансформує зовнішню мотивацію (здобуття оцінки) у внутрішню пізнавальну потребу, де пріоритетом стає саме процес опанування знань, умінь і навичок та корекція власної траєкторії навчання (Таточенко & Гаран, 2025).

У контексті опрацювання помилок учнів корисним може бути перехід від реактивного реагування на помилки до системної превентивної діяльності вчителя. Причому превентивна діяльність вчителя не зводиться до формального застереження від неправильних дій, а передбачає глибокий прогностичний аналіз типових логічних, обчислювальних і концептуальних похибок у мисленні школярів. За такого підходу робота над помилками інтегрується безпосередньо в структуру навчальних завдань (Швець & Благодир, 2012).

Використання ІКТ як «емоційного буфера» у навчанні математики є корисним у ранньому юнацькому віці, коли інтелектуалізація емоцій стає провідним механізмом психологічного захисту. Візуалізація абстрактних математичних понять за допомогою динамічних геометричних середовищ (наприклад, GeoGebra) дозволяє трансформувати когнітивний дисонанс, викликаний високим рівнем абстракції, у наочно-образну схему, що суттєво знижує рівень «математичної тривожності» (Mayer, 2014). Анонімні цифрові опитування (Mentimeter, Kahoot) створюють безпечне комунікаційне поле, де учень може виявити прогалини у знаннях, не ризикуючи соціальним статусом у групі (Heaslip et al., 2014). Гейміфікація навчального процесу переводить діяльність із площини зовнішнього примусу у площину ігрової симуляції, де помилка є природним елементом механіки гри, а не особистою поразкою (Khaleel et al., 2020). Таким чином, цифрові інструменти нівелюють негативний вплив стресових чинників, створюючи умови для концентрації на предметі.

Розвиток метакогнітивних стратегій та саморегуляція є корисними навичками для учнів раннього юнацького віку, оскільки їм важливо розвивати здатність розуміти власні емоції. Якщо має місце математична тривожність, то математика є складним навчальним предметом для таких учнів, а отже на прикладі подолання внутрішніх психологічних бар'єрів під час його вивчення, вони

напрацьовують стратегії подолання складних життєвих чи професійних ситуацій. У методичній літературі пропонуються такі підходи до саморегуляції для подолання математичної тривожності: математичне есе або щоденники та попередня перевірка.

У математичних щоденниках учням пропонують коротко описати свої відчуття перед початком нової теми або після контрольної роботи. Це допомагає екстерналізувати страх (винести його назовні) і усвідомити, що тривога – це лише тимчасовий стан, а не характеристика інтелекту. Наприклад, після однієї з контрольних робіт учениця відмічає, що хвилювалася через брак часу на виконання завдань, тому допускала механічні помилки. Після цього протягом вивчення наступної теми вчитель знайомить клас з техніками саморегуляції (дихання 4-4, м'язова релаксація, позитивний фокус тощо) і пропонує застосувати одну або декілька з них під час самостійної або контрольної роботи, якщо учні відчуватимуть, що хвилювання заважає їм продуктивно працювати. Описуючи свої страхи або почуття після цієї самостійної або контрольної роботи та порівнюючи їх із записами після попередньої роботи, ця учениця зможе оцінити, чи ефективними виявилися для неї запропоновані техніки. Таким чином, учні під час освітнього процесу формують не лише предметні компетентності, а і напрацьовують стратегії саморегуляції в стресових ситуаціях, які зможуть використовувати в житті.

Відповідно до підходу «попередня перевірка» учням надається можливість пройти пробний тест, за структурою ідентичний до підсумкового, але в домашніх умовах або в асинхронному режимі. Прикладом реалізації цього підходу в старших класах у контексті підготовки до стандартизованих іспитів є написання пробних варіантів НМТ вдома чи на уроках, у тому числі без оцінювання результатів, але з наданням зворотного зв'язку. Причому, на нашу думку, важливо надавати зворотний зв'язок не лише щодо правильності виконання завдань, а і щодо стратегій роботи над тестом (Невоєнна, Добростан & Боса, 2025).

Шкільна практика свідчить, що основними психологічними перешкодами, які під час роботи з тестами виникають в учнів, є: імпульсивне виправлення правильних відповідей на хибні; ефект втомленого мозку; поспіх; відволікання на зовнішні фактори; паніка. Для уникнення або мінімізації впливу цих факторів, доцільно

знайомити учнів з техніками саморегуляції та спонукати до їх використання під час освітнього процесу.

Зміна комунікативної моделі «Вчитель-Учень» на суб'єкт-суб'єктну взаємодію передбачає партнерську підтримку, наприклад організацію роботи в малих групах, де старшокласники можуть обговорювати складні завдання між собою. Рівень тривожності значно нижчий, коли пояснення йде від однолітка («рівний — рівному»). Важливим також є акцент на зусиллях, а не здібностях. Похвала за обрану стратегію розв'язання або за наполегливість, а не за «природжений хист до математики», формує в учнів установку на зростання. Така розстановка пріоритетів дозволяє учням сприймати власний інтелект як динамічну структуру, що піддається тренуванню, а не як сталу величину, що спонукає до постійного розвитку та вдосконалення, зміцнює віру у власні сили та можливості. Також групова взаємодія реалізовує ефект соціальної фасилітації, тобто підвищення продуктивності та швидкості виконання простих або добре засвоєних завдань у присутності інших людей (спостерігачів або конкурентів). Крім того, перехід до моделі партнерства нівелює ієрархічний бар'єр, що часто є джерелом стресу в юнацькому віці (Boaler, 2016; Alegre et al., 2020).

Прагматизація та контекстуальність знань як метод подолання математичної тривожності пропонує використання прикладних задач для старшокласників, оскільки провідною діяльністю у 15-17 років є навчально-професійна, а розуміння «навіщо мені це потрібно» знижує опір і тривогу. Наповнення математичних задач професійно орієнтованим або життєво-практичним контекстом дозволяє учням перейти від механічного оперування абстракціями до усвідомленого розв'язання проблемних ситуацій. Це сприяє подоланню розриву між теорією і застосуванням, коли учні не бачать зв'язку між формулою та реальністю, що стає причиною когнітивного дисонансу та стресу (Reyes et al, 2019). Контекстуалізація навчання не лише актуалізує пізнавальний інтерес, а й формує в учнів раннього юнацького віку впевненість у власній спроможності застосовувати здобуті знання, уміння та навички, що є важливим для успішної професійної самоідентифікації.

З огляду на психологію віку, ефективне навчання математики, на нашу думку, має базуватися на диференціації, адаптивності змісту, форм і темпу навчання,

сприянні професійному самовизначенню здобувачів освіти та врахуванні психологічних факторів, зокрема пов'язаних з подоланням математичної тривожності).

Таким чином, ефективне навчання математики, зокрема на етапі підсумкового повторення та систематизації, на нашу думку, має базуватися на диференціації, адаптивності змісту, форм і темпу навчання, сприянні професійному самовизначенню здобувачів освіти та врахуванні психологічних факторів, зокрема пов'язаних з подоланням математичної тривожності. Глибоке розуміння психолого-педагогічних закономірностей періоду ранньої юності є важливим орієнтиром для добору дієвого методичного інструментарію. Поєднання когнітивної підтримки, ціннісної мотивації та психологічного комфорту досягається, зокрема, завдяки інтеграції сучасних цифрових технологій навчання. Будучи одночасно засобом оптимізації освітнього процесу, інструментом дидактичної візуалізації та «емоційним буфером» для зниження математичної тривожності, цифрові технології трансформують етап підсумкового повторення та систематизації у свідому, керовану учнями підготовку як до стандартизованих оцінювань, так і до майбутньої професійної самореалізації.

Висновки до першого розділу

У першому розділі дисертації здійснено комплексний теоретико-методологічний аналіз проблеми повторення та систематизації шкільного курсу математики в сучасних умовах. Нами *розглянуто* означення та зміст основних понять дослідження: «повторення», «узагальнення», «систематизація знань», «педагогічна діагностика», а також *уточнено* зміст понять «сучасні технології навчання», «адаптивне повторення», «діагностична робота». Показано, що діагностика є невід'ємною складовою процесу повторення й систематизації, оскільки забезпечує виявлення рівня опанування змістових ліній, виявлення прогалин і визначення індивідуальної траєкторії роботи учня. Розмежовано підходи до трактування поняття педагогічної діагностики як встановлення початкового стану знань і як системи контролю результатів навчання. Також нами *проаналізовано* місце повторення та систематизації у чинній навчальній програмі з математики для старших класів і систематизовано класифікацію видів повторення. Внаслідок аналізу чинних навчальних програм з математики для рівня стандарту та профільного рівня встановлено, що: у програмах не передбачено спеціально відведеного часу для повноцінного підсумкового повторення; повторення інтегроване у зміст тем або винесене окремо на розсуд учителя; систематизація знань і підготовка до стандартизованих оцінювань потребує додаткових дидактичних засобів. *З'ясовано*, що підсумкове повторення передбачає не лише відтворення раніше засвоєних знань, а й встановлення зв'язків між темами та змістовими лініями і формування цілісної системи понять, що є ключовим для завершального етапу навчання математики у старшій школі.

Також у першому розділі даної роботи було *проаналізовано* наукові підходи до тлумачення понять «технологія навчання», «педагогічна технологія», «освітні технології» та взаємозв'язку між ними, *уточнено* поняття «сучасні технології навчання». Нами *розглянуто* основні сучасні технології навчання, які використовуються в освітньому процесі, а також окреслено потенціал їх застосування під час повторення та систематизації курсу математики в старших класах. *Визначено*,

що використання сучасних педагогічних технологій, зокрема адаптивних, інтерактивних, інформаційно-комунікаційних, мікронавчання, технологій структурно-логічних схем та опорних конспектів, створює підґрунтя для підвищення ефективності процесу повторення та систематизації шкільного курсу математики.

Нами здійснено *порівняльний аналіз* основних засобів (підручників, збірників для підготовки до ЗНО (НМТ)) та організаційних форм повторення та систематизації шкільного курсу математики. Різноманіття засобів і педагогічних технологій для повторення та систематизації шкільного курсу математики і відсутність уніфікованої системи чи набору можливих алгоритмів реалізації цього етапу освітнього процесу ускладнюють вибір ефективної траєкторії, яка б задовольняла індивідуальні потреби учнів. Також було проаналізовано психолого-педагогічні особливості навчання математики учнів старшого підліткового віку. Як результат, *з'ясовано*, що жодна із пропонованих систем засобів і підходів до повторення та систематизації не є ідеальною та не забезпечує повною мірою потреб сучасної старшої школи, зокрема в індивідуалізації навчання, швидкому та якісному зворотньому зв'язку, гнучкому управлінні траєкторією повторення та комплексній інтеграції змістових ліній. Крім того, обмеження часового ресурсу у старшій профільній школі та відмінності в рівні підготовки учнів зумовлюють необхідність формування індивідуальної траєкторії. Це створює обґрунтовану потребу в розробці адаптивної практико-орієнтованої технології повторення та систематизації шкільного курсу математики, яку буде представлено у другому розділі.

РОЗДІЛ 2. РЕАЛІЗАЦІЯ ПРАКТИКО-ОРІЄНТОВАНОЇ АДАПТИВНОЇ ТЕХНОЛОГІЇ ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

2.1 Концептуальна модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики

Під концептуальною моделлю будемо вважати опис елементів методичної системи у контексті реалізації практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики, їх особливості, способи реалізації та взаємозв'язки. Ідейна основа практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації полягає в забезпеченні автономії учнів під час підсумкового повторення шкільного курсу математики. Практико-орієнтованість пропонованої технології полягає в спрямуванні учнів на практичне застосування знань, умінь і навичок під час розв'язування задач різного формату та змісту. Це досягається шляхом діяльнісного підходу в організації повторення та систематизації. З огляду на особистісно-орієнтовану парадигму освіти, когнітивні відмінності учнів та вплив освітніх і навчальних втрат, виникає гіпотеза про те, що адаптивне повторення за індивідуальними траєкторією та темпом є дієвим інструментом систематизації знань та вмінь з математики. Під час формування траєкторії повторення ми будемо спиратися на вже набутий досвід учня та його індивідуальні навчальні потреби, під час реалізації повторення будемо переходити переважно від практики до теорії.

Запропонована нами концептуальна модель містить такі компоненти: цільовий, змістовий, технологічний (процесуальний) та оцінювально-аналітичний. Цільовий та змістовий компонент розглянемо на двох рівнях: глобальному (зумовлені державними нормативними документами) та локальному (сформовані особливостями освітнього процесу). Технологічний (процесуальний) компонент містить опис методів, засобів і організаційних форм реалізації пропонованої технології повторення та систематизації курсу математики. Оцінювально-аналітичний компонент

передбачає оцінювання результатів навчальних досягнень та поступу учнів, а також – ефективності впровадження практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики.

Цільовий компонент. *Глобальними цілями* математичної освітньої галузі відповідно до Державного стандарту (МОН, 2011; МОН, 2024) є: формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для успішної життєдіяльності в сучасному цифрову й технологічному світі; забезпечення інтелектуального розвитку старшокласників, розвитку їхнього логічного, критичного, просторового та алгоритмічного мислення; свідоме оволодіння системою математичних знань і вмінь, необхідних для вивчення суміжних дисциплін (фізики, інформатики, економіки тощо) та продовження освіти. *Локальні цілі* в межах пропонованої практико-орієнтованої технології повторення та систематизації шкільного курсу математики передбачають: 1) виявлення та подолання прогалин у знаннях та вміннях учнів; 2) підвищення рівня математичної компетентності та впевненості в своїх знаннях, уміннях та навичках з математики; 3) приведення фрагментарних уявлень про математичні поняття до цілісного образу математичної картини світу, опанованої в межах шкільної програми.

Мета пропонованої практико-орієнтованої адаптивної технології – систематизація знань та практичне відпрацювання умінь та навичок розв’язування математичних завдань різних форм і змісту учнями старших класів.

Змістовий компонент. *Зміст на глобальному рівні* визначається чинною навчальною програмою з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) рівня стандарту для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів та Програмою зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. *На локальному рівні* змістове наповнення може бути скоригованим у межах зазначених програм відповідно до поточного рівня навчальних досягнень учнів. Таке коригування змісту і рівня реалізовується за рахунок адаптивних технологій. У межах даної методичної розробки ми не визначаємо змістове наповнення, проте регулюємо послідовність його реалізації. Перелік та послідовність змістових ліній та тем буде наведено далі в цьому пункті.

Технологічний (процесуальний) компонент. *Методи* ґрунтуються на застосуванні технологій структурно-логічних схем і опорних конспектів, ІКТ, мікронавчання, інтерактивних та адаптивних технологій навчання, гейміфікації. *Методична основа* пропонованої практико-орієнтованої технології – горизонтальне спіралеподібне повторення, запропоноване О.Школьним та Ю.Захарійченком, зокрема будемо орієнтуватися на пропонований у цьому підході розподіл тем та їх послідовність (Школьний, 2021). *Засобами* є, відповідно, опорні конспекти та таблиці, у тому числі в електронному вигляді та з доповненою реальністю, навчальні короткі відео, тренувальні та тестові завдання з математики, адаптивні тести, розроблений ПЗ. *Організаційні форми* роботи: індивідуальна, консультація, дистанційна, змішана.

Пропонована практико-орієнтована адаптивна технологія повторення та систематизації шкільного курсу математики здійснюється у три етапи: 1) діагностичний, 2) тематичне практико-орієнтоване повторення (окремо за десятьма розділами), 3) практичне відпрацювання на комплексних тестах. *Комплексними тестами* вважатимемо підбірку завдань різних форм за всіма темами шкільного курсу математики, що може виконувати діагностичну, навчальну (тренувальну), контролюючу чи коригувальну функцію.

Оцінювально-аналітичний компонент. Контроль результатів повторення та систематизації шкільного курсу математики реалізовується за допомогою внутрішнього підсумкового тестування та частково за рахунок зовнішнього незалежного оцінювання. Результати ЗНО (НМТ) з математики можуть слугувати орієнтиром, проте не основним інструментом вимірювання результатів впровадження, оскільки це тестування наразі не є обов'язковим, а його результати – загальнодоступними. Тому основним інструментом для вимірювання результатів визначимо внутрішнє підсумкове тестування. Критеріями успішності впровадження пропонованої практико-орієнтованої адаптивної технології повторення будемо вважати: 1) динаміку результатів навчальних досягнень; 2) стабільність результатів; 3) мотиваційно-психологічний фактор. Для оцінювання динаміки навчальних досягнень та поступу учнів будемо порівнювати результати діагностичного та

підсумкового тестування, реалізованого за допомогою комплексних тестів. Стабільність результатів вважатимемо позитивною, якщо під час виконання комплексних тестів учні будуть успішно виконувати завдання того рівня навчальних досягнень з теми/розділу, якого вони досягли під час тематичного практико-орієнтованого повторення. Оцінка мотиваційно-психологічного фактору відбувається переважно за рахунок педагогічного спостереження.

Опис концептуальної моделі практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики наведено у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1.

Концептуальна модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації математики

Компонент концептуальної моделі	Основні положення	
Цільовий	<i>Глобальний рівень</i>	<i>Локальний рівень</i>
	1) формування в учнів математичної компетентності на рівні, достатньому для успішної життєдіяльності в сучасному світі; 2) забезпечення інтелектуального розвитку старшокласників, розвитку їхнього логічного, критичного, просторового та алгоритмічного мислення; 3) свідоме оволодіння системою математичних знань і вмінь, необхідних для вивчення суміжних дисциплін та продовження освіти	1) виявлення та подолання прогалин у знаннях та вміннях учнів; 2) підвищення рівня математичної компетентності та впевненості в своїх знаннях, уміннях та навичках з математики; 3) приведення фрагментарних уявлень про математичні поняття до цілісного образу математичної картини світу, опанованої в межах шкільної програми
Змістовий	<i>Глобальний рівень</i>	<i>Локальний рівень</i>
	Визначається чинною навчальною програмою з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) рівня стандарту для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів та Програмою зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання з математики, здобутих на основі повної загальної середньої освіти.	- коригується відповідно до поточного рівня навчальних досягнень здобувачів освіти за допомогою елементів адаптивного навчання; - визначено розподіл за розділами та темами і послідовність їх опрацювання (див. табл. 2.2)

Компонент концептуальної моделі	Основні положення	
Технологічний (процесуальний)	<i>Методи:</i> технологія структурно-логічних схем і опорних конспектів, ІКТ, мікронавчання, інтерактивні та адаптивні технології навчання, гейміфікація. <i>Засоби:</i> опорні конспекти та таблиці, у тому числі в електронному вигляді та з доповненою реальністю, навчальні короткі відео, тренувальні та тестові завдання з математики, адаптивні тести, розроблений ПЗ. <i>Організаційні форми роботи:</i> індивідуальна, консультація, дистанційна, змішана. <i>Послідовність реалізації:</i> здійснюється у три етапи: 1) діагностичний, 2) тематичне практико-орієнтоване повторення (окремо за десятьма розділами), 3) практичне відпрацювання на комплексних тестах.	
Оцінювально-аналітичний	<i>Результати учнів</i>	<i>Ефективність технології</i>
	1) оцінювання рівня навчальних досягнень з теми/розділу під час тематичного практико-орієнтованого повторення; 2) основний інструмент вимірювання результатів цілісного повторення шкільного курсу математики – внутрішнє підсумкове тестування (комплексний тест); 3) у якості додаткового інструменту можна розглядати результати тесту з математики на НМТ.	Оцінюється за трьома критеріями: 1) динаміка результатів навчальних досягнень учнів; 2) стабільність результатів учнів; 3) мотиваційно-психологічний фактор

Розглянемо детальніше технологічний компонент концептуальної моделі, зокрема алгоритм реалізації повторення та систематизації шкільного курсу математики за пропонованою практико-орієнтованою адаптивною технологією та взаємодію методів, засобів і організаційних форм. Пропонується здійснювати повторення у *три етапи*: діагностика, тематичне практико-орієнтоване повторення та практичне відпрацювання на комплексних тестах.

Первинна діагностика проводиться за допомогою комплексного тесту з завданнями усіх розділів шкільного курсу математики, містить завдання і різних форм, і різних рівнів. Такий тест генерується автоматично із завдань з банку завдань за наперед заданою схемою, на відміну від діагностичних тестів до окремих розділів, метою яких є визначення поточного рівня навчальних досягнень учня з цієї теми. Тематичне повторення складається з 10 розділів, кожен з яких розбито на декілька

тем відповідно до змістового наповнення. Відпрацювання на комплексних тестах несе тренувальну, контролюючу та коригувальну функцію, адже саме за допомогою результатів комплексних тестів оцінюється динаміка результатів навчальних досягнень та стабільність результатів.

Опрацювання кожного розділу заплановано починати з діагностичного тесту до цього розділу, за результатами якого відкриватиметься «мапа розділу» з рекомендаціями до опрацювання. Також до матеріалів тем кожного розділу входять структурно-логічні схеми та опорні конспекти до всього розділу або окремих тем, а також відео-розбори типових завдань і мініуроки до теми. Кожна тема містить декілька уроків в залежності від змістового наповнення, а також диференційованих за рівнем.

Діагностичні (комплексні та тематичні), тренувальні тематичні та тренувальні комплексні тести формуються випадковим підбором завдань із підготовленого банку завдань. Тренувальні тести є адаптивними і їх довжина, складність та послідовність завдань залежать від результатів відповіді на попереднє питання. Комплексні тести (діагностичні, тренувальні, підсумкові) генеруються випадковим підбором завдань, але відповідно до схеми тесту, яка містить інформацію про кількість завдань, їх форму, тему та складність. Після кожного такого тесту учневі надається зворотний зв'язок щодо правильності виконання, розбір завдань тесту та перелік тем, які потребують доопрацювання, з посиланням на матеріали до них. Зауважимо, що під час повторення ми не очікуємо найвищого результату від кожного учня, а лише покращення його власного результату та формування впевнених практичних навичок на рівні, який доступний для нього на даному етапі.

Для відслідковування рівня математичних знань та умінь учнів, відповідно до вимог оцінювання навчальних досягнень учнів із базових дисциплін у системі загальної середньої освіти (МОН, 2020), виокремимо п'ять діагностичних рівнів: не опановано або володіє темою на початковому, середньому, достатньому чи високому рівні. До діагностичного рівня «не опановано» будемо відносити випадки, коли учень не володіє темою і/або не виконує жодних завдань з неї, а отже, потребує повного

повторного її вивчення. Інші діагностичні рівні відповідають типовим орієнтовним вимогам оцінювання навчальних досягнень учнів.

Як було зазначено, усі тести (діагностичні, тренувальні тематичні, комплексні) генеруються випадковим чином зі сформованого банку завдань. Очікується, що такий підхід запобігатиме несвідомому підлаштуванню навчального процесу під завдання конкретного тесту, а також дозволить повертатися до окремих етапів повторення з новими завданнями. Для формування банку завдань під зазначені типи тестів застосуємо поєднання кількох підходів до кодування завдань: структурно-тематичного, рівненево-диференційованого та форматно-класифікованого. Ці положення висвітлено в нашій статті (Бойко, 2025а).

Для реалізації структурно-тематичного підходу позначимо розділи як А, В, С, D, E, F, G, H, I, J, а у межах кожного розділу пронумеруємо теми від 1 до n, залежно від їх кількості. Відповідне кодування наведено у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2.

Змістовий тематичний класифікатор завдань

Код розділу	Назва розділу	Код теми	Назва теми
А	Числа і вирази	A1	Числові множини
		A2	Цілі раціональні вирази
		A3	Дробові раціональні вирази
		A4	Ірраціональні вирази
		A5	Тригонометричні вирази
		A6	Логарифмічні вирази
В	Функції	B1	Означення функції, її властивості та графік
		B2	Елементарні функції, їх властивості та графіки
		B3	Перетворення графіків функції
С	Рівняння	C1	Лінійні рівняння, рівняння з модулем
		C2	Квадратні рівняння
		C3	Дробові раціональні рівняння

Код розділу	Назва розділу	Код теми	Назва теми
С	Рівняння	С4	Ірраціональні рівняння
		С5	Тригонометричні рівняння
		С6	Показникові рівняння
		С7	Логарифмічні рівняння
		С8	Системи рівнянь
D	Нерівності	D1	Числові нерівності та їх властивості
		D2	Лінійні нерівності
		D3	Квадратичні нерівності
		D4	Раціональні нерівності
		D5	Показникові нерівності
		D6	Логарифмічні нерівності
E	Текстові задачі	E1	Задачі на арифметичні співвідношення між об'єктами
		E2	Задачі на подільність цілих чисел та пропорційний поділ
		E3	Задачі на відсотки
			Задачі на рух та роботу
F	Елементи математичного аналізу	F1	Числові послідовності. Арифметична та геометрична прогресії
		F2	Похідна та її застосування
		F3	Первісна, інтеграл та їх застосування
G	Елементи стохастики	G1	Комбінаторика
		G2	Теорія імовірностей
		G3	Статистика
H	Планіметрія	H1	Найпростіші геометричні фігури на площині
		H2	Трикутники
		H3	Чотирикутники
		H4	Многокутники
		H5	Коло, круг та їх елементи

Код розділу	Назва розділу	Код теми	Назва теми
I	Стереометрія	I1	Прямі та площини у просторі
		I2	Призма і паралелепіпед
		I3	Піраміда
		I4	Циліндр
		I5	Конус
		I6	Сфера, куля
J	Координати і вектори	J1	Прямокутна декартова система координат на площині та в просторі
		J2	Вектори на площині та в просторі
		J3	Геометричні перетворення

Рівневу диференціацію завдань виконаємо відповідно до вимог оцінювання навчальних досягнень у системі загальної середньої освіти, позначивши їх як р, q, r, s, де р – початковий, q – середній r – достатній, s – високий. Для класифікації завдань за форматами також використаємо буквене кодування, позначивши завдання з альтернативами, завдання на встановлення відповідності та завдання з короткою відповіддю як x, y, z відповідно. Зауважимо, що кількість типів завдань з часом може (і планується) розширюватися.

Тобто до кожного з десяти розділів (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J) пронумеруємо теми від 1 до n, у межах кожної теми створимо завдання чотирьох рівнів складності (р, q, r, s) і для кожного рівня складності підбірку завдань трьох типів (x, y, z) з зазначеною кількістю завдань у кожній, причому кількість завдань може змінюватися з розширенням банку завдань. Таким чином, п'яте завдання на встановлення відповідності середнього рівня з теми «Квадратні рівняння» матиме код C2qu_5, а 7 завдання достатнього рівня з короткою відповіддю з теми «Многогранники» – I2rz_7. Зауважимо, що у випадку завдань на встановлення відповідності можемо зустрічати випадки, коли воно покриває питання кількох тем розділу. У такому випадку в кодуванні завдання замість номеру теми розділу позначимо нуль. Таким чином, завдання за номером A0sy_10 повертає умову десятого завдання на відповідність високого рівня з розділу «Вирази», яке має на меті перевірити володіння кількома

темами у межах цього розділу, наприклад перетворення ірраціональних, тригонометричних та логарифмічних виразів. Причому до кожного такого завдання на відповідність додатково кодується кожен його пункт. У наведеному прикладі завдання на відповідність пункт із ірраціональним виразом матиме код $A0\{4\}_{sy_10}$, тригонометричним – $A0\{5\}_{sy_10}$, логарифмічним – $A0\{6\}_{sy_10}$.

Розглянемо детальніше етапи реалізації повторення за пропонованою адаптивною системою та складові кожного з них.

Тематичне повторення. Вивчення розділу починається з діагностичної роботи до розділу, представленої у вигляді автоматично згенерованого тесту за темами поточного розділу відповідно до попередньо заданої схеми, яка включає інформацію про кількість завдань, їх форму, тему та складність. Ідея автоматичної генерації тесту зі сформованого банку завдань зумовлена, зокрема, передбаченою опцією повторного проходження теми і прагненням уникнути ситуації, коли учні відповідають на завдання тесту, пам'ятаючи правильні відповіді після першого виконання. Результатом даної роботи є попереднє визначення рівня володіння учнем кожною із тем та відкриття мапи розділу. Мапа розділу відображає перелік тем та попередньо визначений рівень володіння учнем кожною з них, а також доступ до структурно-логічної схеми з основними теоретичними положеннями та формулами.

Перед проходженням тем розділу передбачається огляд вмісту структурно-логічної схеми розділу (синхронно з учителем або у форматі відео). Після цього учень послідовно переходить від однієї теми до іншої та опрацьовує її в обсязі, визначеному результатами діагностики та очікуваними результатами повторення. Основними засобами реалізації практичної спрямованості пропонованого підходу є тренувальні вправи та тренувальні тести. *Тренувальними вправами* ми називаємо завдання відкритої форми різних рівнів складності, які розв'язуються учнями на уроці разом з учителем або опрацьовуються самостійно за допомогою відео-уроків, а *тренувальними тестами* – адаптивні тести у межах конкретної теми розділу змістового тематичного класифікатора завдань, які виконуються учнем самостійно.

Якщо за результатами діагностики учень має високий рівень знань з теми, то, першочергово, отримує тренувальний тематичний тест, включно з завданнями

високого рівня, для підтвердження попередньо одержаного висновку. У випадку підтвердження високого рівня, учень одразу переходить до наступної теми. Якщо ж результат тематичного тренувального тесту показує рівень володіння темою нижче високого, то учневі пропонується проходження уроків, на яких розглядаються підходи до розв'язування завдань вищих за одержаний результат рівнів. Проходження таких уроків може відбуватися як у синхронному форматі з учителем (під час індивідуальної чи групової форми роботи), так і в асинхронному форматі за наперед записаними відеоуроками. Передбачається також самостійна робота учнів із завданнями, у тому числі, відкритої форми з повним поясненням, та зворотний зв'язок від учителя. Після проходження уроків учневі пропонується повторний тематичний тест, за результатами якого визначається поточний рівень володіння темою, який і буде відображатися на мапі розділу.

Якщо за результатами діагностики учень має достатній рівень знань з теми, то йому пропонується тренувальний тематичний тест із завданнями до достатнього рівня включно, але без завдань високого рівня, для підтвердження попередньо одержаного висновку. У випадку підтвердження достатнього рівня, учень (самостійно або з консультацією вчителя) обирає одну із опцій: перейти до наступної теми або опрацювати уроки для високого рівня володіння темою. Якщо ж тематичний тест показав нижчий результат, то учневі пропонується проходження уроків до досягнення достатнього рівня і повторне проходження тесту. Досягнувши достатнього рівня, знову ж таки, учень (самостійно або з консультацією вчителя) обирає перейти або до уроків високого рівня, або до наступної теми.

Аналогічний алгоритм реалізовується, якщо попередньо визначено середній рівень, але перед первинним тестом учень в обов'язковому порядку ознайомлюється з опорним конспектом до теми, який може супроводжуватися елементами доповненої реальності, що включаються відео коментарі чи пояснення.

У випадку, якщо за результатами діагностичного тесту до розділу визначено, що учень не володіє темою або має початковий рівень знань з неї, то він обов'язково переходить до проходження уроків спершу на початковий та середній рівень і, після

підтвердження результату тематичним тестом, до уроків достатнього рівня або наступної теми.

Зауважимо, що на кожній темі учень (самостійно або за порадою учителя) може прийняти рішення про перехід до наступної теми, не досягаючи вищих за отриманий результат рівнів. Таке рішення зумовлене ідеєю дати можливість повторити усі теми на доступному для конкретного учня рівні. Проте варто відмітити і потенційні ризики самостійного прийняття таких рішень учнем, пов'язані з впливом знань і вмінь однієї теми на можливість опанувати інші. Наприклад, упустивши навичку перетворень дробово-раціональних виразів, учень може позбавити себе можливості опанувати на достатньому рівні розв'язування відповідних рівнянь і нерівностей тощо. З огляду на це рекомендуємо приймати подібні рішення за участю учителя.

Після проходження усіх тем розділу пропонується підсумковий тест за подібною до діагностичного структурою для відслідковування прогресу. Цей тест виконує роль проміжного контролю і дозволяє оцінити ефективність пропонованої технології.

Практичне відпрацювання на комплексних тестах. Після тематичного повторення окремих розділів закономірним є практичне відпрацювання розв'язування завдань різних рівнів складності, різних форм і, найголовніше, різних тем. Такий вид роботи спонукає не лише пригадувати поняття, формули, алгоритми тощо, а і виокремлювати належність завдання до певної теми та обирати більш раціональний спосіб розв'язання. Такий спосіб переходу від окремих розділів до комплексних тестів є типовим для більшості підходів до повторення та систематизації. Комплексні тести генеруються довільним чином із банку завдань відповідно до схеми тесту, що містить інформацію про кількість завдань, їх тему, форму, складність. Схема тесту може відповідати структурі тестування, у рамках підготовки до якого реалізовується повторення, або складатися вчителем під освітні потреби учня чи групи учнів.

Після виконання тесту повертається кількісна, відсоткова та якісна оцінка його результатів. Якісна оцінка відображає інформацію про те, з якими темами (розділами) виконавець тесту впорався добре, а з якими ні; завдання яких рівнів складності було

переважно виконано, а яких ні, і чи відповідає це визначеному рівню володіння темою під час тематичного опрацювання. Також за результатами тесту формуються рекомендації щодо повторного або поглибленого опрацювання певних тем. Також до кожного завдання можна переглянути правильну відповідь, пояснення або вказівки до розв'язання, його тематичну належність.

Працювати з комплексними тестами учень може самостійно, оскільки розгорнутий зворотний зв'язок, як передбачається, дозволить коректно оцінити його результат і дати вказівки до можливих подальших дій. Проте, як зазначалося раніше, учень може не бачити повну картину з методичної точки зору, тому вважаємо, що консультація вчителя сприятиме більш ефективній роботі. Причому рівень контролю вчителем може значно відрізнятися для різних учнів. Під час реалізації повторення в невеликих групах учнів очікувано, що за рахунок потенційно різних рівнів навчальних досягнень з математики та різного темпу роботи, потреба в консультації вчителя виникатиме в різний час та матиме різний зміст. Для роботи з великими групами учнів, можливо, доцільним буде застосувати кооперативне навчання, зокрема роботу в парах або групах, яка об'єднуватиме учнів з однаковим запитом. Отже, пропонується підхід до повторення та систематизації шкільного курсу математики є адаптивним та практико-орієнтованим. Адаптивність проявляється в кількох аспектах: опрацювання теми в обсязі, відповідному до поточного рівня; досягнення результату, доступного на даному етапі, без обов'язкового нарощування складності до максимуму; самостійне керування часом та темпом навчання. Оскільки алгоритм реалізації пропонується автоматизувати, то передбачається можливість самостійного проходження готового курсу здобувачами освіти, яка включатиме не лише кількісне, а і якісне оцінювання результатів, а також рекомендації щодо можливих подальших кроків. Проте, на даному етапі рекомендується повторення за участі учителя. За рахунок автономності кожного учня, реалізація повторення може здійснюватися як при індивідуальній, так і груповій роботі в аудиторному, дистанційному чи змішаному навчанні.

Відповідно до описаної концептуальної моделі практико-орієнтована адаптивна технологія повторення та систематизації шкільного курсу математики містить цільовий, змістовий, технологічний (процесуальний) та оцінювально-аналітичний компоненти (табл. 2.1). Цільовий та змістовий компоненти переважно визначаються нормативними документами та частково визначені нами на локальному рівні, зокрема у таблицях 2.1 та 2.2. Далі ми зосередимося більше на технологічному та оцінювально-аналітичному компонентах. У пунктах 2.2 та 2.3 розглянемо реалізацію технологічного (процесуального) компоненту концептуальної моделі практико-орієнтованого адаптивного повторення та систематизації на прикладі змістових ліній «Рівняння та нерівності» і «Планіметрія», а у пункті 2.4 – оцінювально-аналітичного компоненту, що стосується як результатів учнів, так і ефективності пропонованої технології.

2.2 Особливості практико-орієнтованого адаптивного повторення та систематизації курсу алгебри (на прикладі змістової лінії «Рівняння і нерівності»)

У цьому пункті розглянемо особливості реалізації практико-орієнтованого адаптивного підходу до систематизації та підсумкового повторення змістової лінії «Рівняння та нерівності». Методичні аспекти вивчення окремих тем цієї змістової лінії протягом усіх рівнів повної загальної освіти розглянуто в курсі методики навчання математики на відповідному напрямку спеціальності «Середня освіта» закладів вищої освіти (Слепкань, 2006; Прус & Швець, 2011; Стрілець, Запорожченко & Шпеко, 2023). Питанню повторення та систематизації з метою підготовки до ЗНО присвячені, зокрема, роботи Ю. Ботузової (Ботузова, 2020), Є. Неліна та О. Мажинської (Нелін & Мажинська, 2023), О. Школьного та Ю. Захарійченка (Школьний, 2015; Школьний & Захарійченко, 2017) на які, у тому числі, будемо опиратися в наших методичних пошуках.

У змістовому тематичному класифікаторі завдань (табл. 2.2) змістовій лінії «Рівняння та нерівності» присвячено два розділи (С і D). Опрацювання розділів

«Рівняння» та «Нерівності» починається з діагностичного тесту. За результатами такого тесту попередньо визначаються діагностичні рівні навчальних досягнень учнів: не опановано або володіє темою на початковому, середньому, достатньому або високому рівні. Після цього учні переходять до тематичних тестів кожної теми розділу, які відповідають їх попередньо визначеному діагностичному рівню, за результатами яких вони діють відповідно до алгоритму, описаного в пункті 2.1 та відображеного у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Алгоритм тематичного опрацювання відповідно до діагностичного рівня

Діагностичний рівень (за результатами діагностичного тесту до розділу)							
Не опановано	Початковий рівень	Середній рівень		Достатній рівень		Високий рівень	
Послідовно проходить тему: теорія та найпростіші випадки з прикладами, систематизація за допомогою СЛС, відпрацювання навичок розв'язування.		Чи підтверджено результатами тренувальних діагностичних тестів					
		Так	Ні	Так	Ні	Так	Ні
		Опановує достатній рівень або переходить до наступної теми.	Продовжує опрацювати завдання середнього рівня.	Опановує високий рівень або переходить до наступної теми.	Продовжує опрацювати достатній рівень.	Перехід до наступної теми.	Опрацьовує завдання високого рівня.

З власного педагогічного досвіду можемо стверджувати, що в учнів початкового та середнього рівня навчальних досягнень виникають труднощі з вибором алгоритму розв'язування рівнянь. Тому для таких учнів варто спершу звернути увагу на те, які існують види рівнянь (нерівностей), як їх розпізнати та які способи розв'язування можна застосувати до кожного з них. Систематизувати цей матеріал зручно за допомогою розгорнутих структурно-логічних схем (СЛС) з правилами-орієнтирами та прикладами до них. Після цього варто провести закріплення знань, умінь та навичок за допомогою тренувальних вправ та тестів.

Для учнів, які не опанували більшість тем розділів С («Рівняння») та D («Нерівності») змістового тематичного класифікатора завдань, варто послідовно пройти всі теми цих розділів, а потім систематизувати відомості щодо типів рівнянь (нерівностей), способів їх розпізнавання та способів розв'язування за допомогою

розгорнутих СЛС. Для учнів, що мають достатній та високий рівень знань, можна запропонувати СЛС як допоміжні матеріали, а зосередитися більше на практиці розв'язування завдань, поступово нарощуючи складність завдань та збільшуючи рівень самостійності учнів під час розв'язування цих завдань.

Основним засобом реалізації практичної спрямованості пропонованого практико-орієнтованого адаптивного повторення шкільного курсу математики є виконання тренувальних вправ та тестів. Тренувальні вправи дають можливість сформувати навички і вміння розв'язування завдань та заповнити прогалини у знаннях, а тренувальні тести дають учню миттєвий зворотний зв'язок щодо того, що вдалося, що ні. Якщо під час виконання тренувальних тестів в учнів систематично виникають труднощі з завданнями певної теми чи складності, вони можуть у будь-який момент повертатися до тренувальних вправ, щоб відпрацювати навички розв'язування таких завдань.

Після опрацювання тем кожного з розділів «Рівняння» і «Нерівності» учням пропонується підсумковий тест до відповідного розділу. За результатами цього тесту можна оцінити прогрес учня у вивченні тем відповідного розділу. Якщо одержаний результат відповідає очікуваним навчальним цілям, то учень переходить до опрацювання наступного розділу. Якщо з певних тем розділу поставлені цілі не досягнуто, то учень продовжує опрацювання цих тем. Однак, якщо за кілька циклів такого повторення прогресу не відбувається, ми радимо переходити до наступного розділу, щоб не втратити динаміки повторення та систематизації.

Розглянемо детальніше особливості повторення та систематизації розділів «Рівняння» та «Нерівності», а також приклади реалізації тестів та приклади запропонованих у них завдань.

2.2.1 Особливості повторення та систематизації окремих тем розділу «Рівняння» (згідно з класифікатором, наведеним у таблиці 2.2)

У розділі «Рівняння» змістового тематичного класифікатора (табл. 2.2) представлено завдання на розв'язування різних типів рівнянь та їх систем, а не на їх застосуванні до розв'язування прикладних задач. Завдання прикладного характеру, зокрема на складання математичних моделей, у межах нашої розробки віднесено до розділу «Текстові задачі», де акцентовано увагу на створенні математичних моделей процесів і явищ реального світу та аналізі цих моделей, вважаючи, що навички розв'язування рівнянь і систем уже сформовано в розділі «Рівняння».

Завдання розділу «Рівняння» розбито на 8 тем:

- 1) лінійні рівняння;
- 2) квадратні рівняння;
- 3) дробові раціональні рівняння;
- 4) ірраціональні рівняння;
- 5) тригонометричні рівняння;
- 6) показникові рівняння;
- 7) логарифмічні рівняння;
- 8) системи рівнянь.

Розглянемо особливості розв'язування основних типів рівнянь, на які варто звернути увагу учнів під час повторення та систематизації даного розділу. Алгоритми розв'язування відповідних рівнянь наведено у структурно-логічних схемах (Додаток Б). Ключовим кроком для учнів, на якому варто наголосити, під час розв'язування рівнянь є правильне визначення типу цього рівняння, щоб коректно обрати спосіб розв'язання.

Лінійні рівняння містять змінну лише в першому степені, не містять: ділення на змінну (проте можуть містити дробові вирази з числами у знаменнику); змінну під коренем; тригонометричних, показникових, логарифмічних функцій від змінної. Розв'язуючи лінійне рівняння, потрібно спершу розкрити дужки (якщо вони є) та перенести вирази зі змінною в ліву частину, а числа – в праву, змінюючи під час

перенесення знаки на протилежні. Після зведення лінійного рівняння до вигляду $ax = b$ можливі три варіанти:

- 1) якщо $a \neq 0$, то рівняння має один корінь: $x = \frac{b}{a}$;
- 2) якщо $a = 0, b \neq 0$, то рівняння коренів не має;
- 3) якщо $a = 0, b = 0$, то розв'язком є проміжок $(-\infty; +\infty)$.

Типові помилки під час розв'язування лінійних рівнянь: перенесення виразів з однієї частини рівняння в іншу без зміни знаку; помилка в знаходженні невідомого множника на останньому кроці розв'язання, якщо $a \neq 0$; хибні висновки щодо розв'язків рівняння, якщо $a = 0$.

За нашими спостереженнями помилки з перенесенням виразів через знак дорівнює та знаходженням невідомого множника є, зазвичай, механічними або хибно автоматизованими на етапі вивчення теми. Тобто учні переважно знають, як потрібно виконувати дію, але під час розв'язування не застосовують це знання. Ми вбачаємо два основні шляхи виправлення помилок такого типу: доводити до автоматизму правильні алгоритми багаторазовим повторенням або привчати учнів застосовувати принцип оберненої дії з відповідним записом наприкінці рядка (спершу дивимося, яка дія біля невідомого «заважає», потім до обох частин рівняння застосовуємо обернену дію) під час рівносильних перетворень рівнянь. Приклад запису розв'язання лінійного рівняння з застосуванням принципу оберненої дії:

$$2x + 3 = 7; | - 3$$

$$2x = 7 - 3;$$

$$2x = 4; | : 2$$

$$x = 2.$$

Щоб довести до автоматизму правильне виконання рівносильних перетворень рівнянь, варто запропонувати учням підбірку завдань на лінійні рівняння з повним поясненням (щоб уникати вгадування відповідей у завданнях з альтернативами). Якщо в учнів уже усталено сформувалися хибні стратегії, одноразовим відпрацюванням нова навичка може не закріпитися, тому ми вважаємо необхідним застосувати принципи розподіленого повторення і пропонувати час від часу

(наприклад у якості розминки перед уроком) завдання на розв'язування лінійних рівнянь з повним поясненням, поступово збільшуючи інтервали між повтореннями.

Якщо попри багаторазове повторення дій виникають попередні помилки або є труднощі з формулюванням правил, наприклад знаходження невідомого множника, варто запропонувати учням принцип оберненої дії з відповідним записом вкінці рядка. Таке правило буде універсальним як і для перенесення через знак дорівнює, так і для знаходження невідомого множника. Особливо корисним, за нашими спостереженнями, такий підхід є у ситуаціях, коли учні плутають дії множення та додавання і розв'язують, наприклад, рівняння $2x = 3$ як $x = 3 - 2$.

Квадратні рівняння зводяться до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) шляхом рівносильних перетворень. Для учнів, які мають труднощі з розв'язуванням таких рівнянь, варто звернути увагу, що в лінійних рівняннях ми діємо за принципом «змінна вліво, числа – вправо», а в квадратних – переносимо усі вирази вліво. Важливо звернути увагу учнів, що квадратні рівняння поділяються на повні ($b \neq 0, c \neq 0$) та неповні ($b = 0$ і/або $c = 0$) та перевірити вміння їх розпізнавати.

Для розв'язування повних квадратних рівнянь зручно застосовувати класичний метод обчислення дискримінанта. Для правильного обчислення дискримінанта та дійсних коренів повного квадратного рівняння, якщо вони існують, варто переконатися, що учні вміють правильно визначати коефіцієнти рівняння, включно з їхніми знаками. У випадку неповних квадратних ключовим кроком є визначення типу цього неповного квадратного рівняння. Назвімо для учнів квадратне рівняння з $b = 0, c \neq 0$ рівнянням вигляду «квадрат-число», а якщо $b \neq 0, c = 0$ – рівнянням вигляду «квадрат і просто змінна». Рівняння «квадрат-число» за допомогою рівносильних перетворень зводимо до вигляду $x^2 = A$ і діємо залежно від знаку числа A . Важливо наголосити учням на необхідності перевірки знаку числа A , бо квадрат дійсного числа не може бути від'ємним. Якщо $A > 0$, то слід звернути увагу учнів на те, що таке рівняння має два корені, а також нагадати їм, що таке рівняння можна розв'язати за допомогою формули різниці квадратів та зведення до рівняння вигляду

«добуток дорівнює нулю». Рівняння вигляду «квадрат і просто змінна» також зводяться до вигляду «добуток дорівнює нулю» шляхом винесення змінної за дужки.

Теорему Вієта для повних квадратних рівнянь і застосування теореми, оберненої до теореми Вієта, до розв'язання зведених квадратних рівнянь, варто розглянути окремо. Під час розв'язування квадратних рівнянь для учнів, котрі досягли середнього рівня, варто розглянути розклад квадратного тричлена на множники за формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1, x_2 – корені квадратного рівняння. Починаючи із середнього рівня навчальних досягнень і вище пропонуємо розглядати ще й біквадратні рівняння і метод заміни змінної.

Типові помилки під час розв'язування неповних квадратних рівнянь:

1) для рівнянь, де $b = 0; c \neq 0$, перенесено число в праву частину без зміни знаку або записано хибні корені для випадку, коли вираз у квадраті дорівнює від'ємному числу, а отже рівняння насправді не має дійсних коренів;

2) для рівнянь, де $b \neq 0; c = 0$ втрачено корінь $x = 0$ за рахунок ділення на змінну замість винесення спільного множника за дужки.

3) розв'язування через дискримінант з помилками в обчисленні.

Основний спосіб виправлення перших двох типів помилок – практика виконання завдань. Наприклад, якщо учнем допущено помилку в рівнянні $2x^2 - 5x = 0$, а саме розв'язано як $2x - 5 = 0$, звідки $x = 5$, то після пояснення помилки слід запропонувати подібні завдання, а після досягнення успіху з їх розв'язуванням, завдання такого ж типу, але в іншій конфігурації: $2x - 3x^2 = 0; 7x^2 = 28x$ тощо.

Щодо ситуацій, коли учні намагаються розв'язувати неповні квадратні рівняння за допомогою дискримінанта, то ми вважаємо доречним зазначити для учнів, що такий спосіб теж можливий (і проілюструвати його для обох типів неповних квадратних рівнянь), але не раціональний.

Типові помилки під час розв'язування повних квадратних рівнянь:

1) помилка в обчисленні дискримінанта (особливо, якщо $c < 0$);

2) не змінено знак другого коефіцієнта або не помножено знаменник на старший коефіцієнт в обчисленні коренів квадратного рівняння;

3) використання значення дискримінанта (замість кореня з нього) у формулі обчислення коренів квадратного рівняння;

4) розв'язуючи за допомогою теореми, оберненої до теореми Вієта, допущено помилку у визначенні суми та добутку коренів рівняння.

Для учнів, котрі допускають систематичні помилки, пов'язані зі знаками коефіцієнтів, пропонуємо вводити звичку виписувати ці коефіцієнти перед розв'язування рівняння. Аналогічно, якщо учень записує у формулі коренів квадратного рівняння значення дискримінанта, а не кореня з нього, радимо формувати звичку після обчислення дискримінанта записувати окремо $\sqrt{D}$. Якщо, попри виписані коефіцієнти, учень допускає помилки в обчисленні коренів квадратного рівняння, то варто звернути увагу учнів на «розшифровку» цієї формули. Якщо учень допускає помилки під час застосування теореми, оберненої до теореми Вієта, то вважаємо необхідним відпрацювати навичку визначення суми та добутку коренів квадратного рівняння (як для зведеного, так і для не зведеного). Проте, якщо труднощі виникають на етапі підбору коренів (за умови правильно визначених суми і добутку), слід рекомендувати учневі розв'язувати квадратні рівняння через дискримінант.

Дробові раціональні рівняння містять дробові вирази, у знаменнику хоча б одного з яких міститься змінна. Такі рівняння можна звести до одного із двох виглядів: «дріб дорівнює нулю» або «дріб дорівнює дробу». У першому випадку застосовують рівносильні перетворення:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$$

У другому випадку будемо діяти за властивістю пропорції, враховуючи область допустимих значень (ОДЗ) змінної, а саме: знаменники дробів не дорівнюють нулю. Після застосування властивості пропорції отримаємо лінійне або квадратне рівняння, схеми розв'язування яких було розглянуто вище. Одержані після розв'язування лінійного або квадратного рівняння корені потрібно перевірити на належність ОДЗ. Якщо після застосування властивості пропорції одержано рівняння вищого степеня, ніж другий, то має сенс початкове рівняння звести до вигляду «дріб дорівнює нулю».

Типові помилки під час розв'язування дробових раціональних рівнянь пов'язані з арифметичними обчисленнями, перетвореннями дробових раціональних виразів та не врахуванням ОДЗ. Якщо в учнів виникають систематичні помилки з перетворенням дробових раціональних виразів, радимо повернутися до опрацювання теми АЗ змістового тематичного класифікатора завдань «Дробові раціональні вирази». Для учнів, котрі постійно забувають врахувати ОДЗ, можна запропонувати «правило митного контролю», коли перед записом остаточної відповіді «всі заборонені речі викидаємо», тобто всі корені, які не належать ОДЗ, у відповідь записувати не можна.

Ірраціональні рівняння містять змінну під знаком кореня. Більшість із цих рівнянь зводяться до найпростіших ірраціональних рівнянь. У межах шкільного курсу математики до таких рівнянь відносять такі типи:

- 1) $\sqrt[n]{x} = A$;
6. $\sqrt[n]{f(x)} = A$;
7. $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$;
8. $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$.

Якщо n – непарне натуральне число, більше за 1, то достатньо обидві частини рівняння піднести до відповідного степеня, оскільки в таких випадках немає обмежень ні по ОДЗ, ні по значеннях, яких може набувати корінь непарного степеня.

Якщо n – парне натуральне число, то важливо звернути увагу учнів, що і підкореневий вираз, і значення самого кореня мають бути невід'ємними. До перших двох типів рівнянь доречно також застосовувати правило «ментального світлофора»: якщо $A < 0$, то це червоне світло, тому розв'язування зупиняємо і записуємо, що коренів немає, а якщо $A \geq 0$, то це зелене світло і потрібно обидві частини піднести до n -го степеня. Для рівняння $\sqrt[n]{x} = A$ таким чином буде одержано відповідь, а для рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = A$ необхідно буде розв'язати одержане рівняння (зазвичай лінійне або квадратне).

Для рівняння $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, де n – парне натуральне число, можна застосувати рівносильне перетворення:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Для рівнянь вигляду $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$, де зазвичай $n = 2$, можна застосувати рівносильне перетворення:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (g(x))^n, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Також рівняння третього та четвертого типу, де n – парне натуральне число, можна розв'язувати піднесенням обох частин до n -го степеня, але після цього виконати перевірку, оскільки можуть з'являтися сторонні корені.

Оскільки в ході розв'язування ірраціональних рівнянь після піднесення до степеня зазвичай буде одержано лінійне або квадратне рівняння, необхідно, щоб учень мав сформовані навички розв'язування цих видів рівнянь. Тому переходити до ірраціональних рівнянь перш ніж учень досягне середнього рівня навчальних досягнень з тем «лінійні рівняння» та «квадратні рівняння» ми не рекомендуємо. Для учнів, які опрацьовують тему «Ірраціональні рівняння» на достатній або високий рівень також пропонуємо розглядати випадки, коли ліва частина представлена сумою або різницею квадратних коренів (рівняння двічі підносимо до квадрату) та розв'язування ірраціональних рівнянь методом заміни змінної.

Типові помилки під час розв'язування ірраціональних рівнянь: не врахування ОДЗ; запис у відповідь сторонніх коренів (не застосовано ні рівносильних перетворень, ні перевірку); помилка в піднесенні двочлена до квадрата (пропущено подвоєний добуток у формулі скороченого множення). Для уникнення помилки з записом сторонніх коренів радимо пропонувати учням виконувати перевірку перед остаточним записом відповіді. Якщо систематично виникає помилка з піднесенням правої частини до квадрату у рівняннях вигляду $\sqrt{f(x)} = g(x)$, то варто повторити з учнями формули скороченого множення та відпрацювати навичку їх застосування на простіших прикладах, повернувшись до матеріалів теми А2 змістового тематичного

класифікатора завдань «Цілі раціональні вирази», що стосуються формул скороченого множення.

Тригонометричні рівняння містять змінну, що є аргументом тригонометричної функції (синуса, косинуса, тангенса або котангенса). У структурно-логічній схемі (див. Додаток Б) наведено формули розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь та особливі випадки (синус або косинус дорівнюють ± 1 або 0). Проте також зауважимо, що до розв'язання тригонометричних рівнянь часто зручно застосувати графічний метод, особливо у випадках, коли потрібно з'ясувати кількість розв'язків рівняння, зокрема на заданому відрізку. Важливо звернути увагу учнів на відсутність розв'язків рівняння $\sin x = a$ та $\cos x = a$, якщо $|a| > 1$, що пов'язано з множиною значень відповідних тригонометричних функцій. Також важливо звернути увагу учнів на врахування періодичності тригонометричних функцій під час розв'язування тригонометричних рівнянь. Для учнів, які опановують тему «Тригонометричні рівняння» на достатньому рівні також розглядатимемо метод розкладання на множники та метод заміни змінної. Для учнів, які опановують завдання високого рівня навчальних досягнень з цієї теми, також будемо розглядати однорідні тригонометричні рівняння.

Типові помилки під час розв'язування тригонометричних рівнянь: не враховано період у записі розв'язків рівняння або під час рівносильних перетворень рівняння; помилково записана формула (не записано $\pm$ у формулі розв'язків рівняння косинуса або $(-1)^k$ у формулі розв'язків рівняння синуса); записано формулу розв'язків рівнянь синуса або косинуса у випадку, якщо вони дорівнюють числу, модуль якого більший за одиницю, а отже розв'язків немає.

Причиною помилок, пов'язаних із записом формули розв'язків рівнянь зазвичай є нерозуміння логіки утворення цих формул. Тому першочерговою задачею вважаємо проілюструвати розв'язки тригонометричних рівнянь графічно, причому як і за допомогою одиничного кола, так і за допомогою графіків функцій. На одиничному колі зручно для учнів показати виведення формул розв'язків рівнянь вигляду $\sin x = a$ та $\cos x = a$, а за допомогою графіків функцій зручніше проілюструвати розв'язки рівнянь вигляду $\tan x = a$ та $\cot x = a$. Також за

допомогою графіків функцій учням більш наочно видно кількість розв'язків тригонометричного рівняння, ніж на одиничному колі. Після ілюстрації виведення формул ми пропонуємо відпрацювати навичку розпізнавання та записування формул розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь і переходити до складніших випадків, де аргумент тригонометричної функції представлений многочленом.

Якщо учень автоматично записує формулу розв'язків для рівнянь $\sin x = a$ та $\cos x = a$, де $|a| > 1$, то одним зі способів може бути правило «ментального світлофора», за яким першим кроком у розв'язуванні рівняння $\sin x = a$ або $\cos x = a$ є визначення, чи належить число a проміжку $[-1; 1]$: якщо так, то вмикається зелене світло (розв'язуємо рівняння), якщо ні, то вмикається червоне світло (зупиняємо розв'язання і записуємо, що коренів немає). За такого підходу важливо застосовувати «ментальний світлофор» для кожного рівняння синуса або косинуса, а не згадувати про нього лише, коли коренів немає.

Показникові рівняння розпізнаємо по змінній, яка міститься у показнику степеня. Важливо для учнів під час розв'язання таких рівнянь пам'ятати, що показниковий вираз може набувати лише додатних значень. Зазвичай показникові рівняння зводяться до найпростіших виглядів: 1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$; 2) $a^{f(x)} = b$. У першому випадку прирівнюють показники і розв'язують одержане рівняння. У другому випадку, застосовують метод логарифмування ($a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$), якщо $b > 0$, а якщо $b \leq 0$, то таке рівняння коренів не має. Після досягнення середнього рівня навчальних досягнень з теми «Показникові рівняння» пропонуємо розглядати з учнями розв'язування таких рівнянь методом розкладання на множники та методом заміни змінної, а для високого рівня – однорідні показникові рівняння.

Типові помилки під час розв'язування показникових рівнянь: не врахування множини значень показникової функції (у випадках, коли показниковий вираз дорівнює недодатному числу і рівняння не має коренів, учні записують для нього розв'язки, ігноруючи знак мінуса); арифметичні помилки та помилки зі зміною знаку під час перенесення виразів з однієї частини рівняння в іншу; помилки в застосуванні властивостей степенів.

Для випадку не врахування множини значень показникової функції, можна також поширити уже знайомий учням прийом «ментального світлофора», застосовуючи його для кожного показникового рівняння вигляду $a^{f(x)} = b$. Якщо під час розв'язування показникових рівнянь в учнів систематично виникають помилки в застосуванні властивостей степеня, варто повернутися до матеріалів теми А2 змістового тематичного класифікатора завдань «Цілі раціональні вирази», що стосуються властивостей степеня.

Логарифмічні рівняння містять змінну в підлогарифмічному виразі або в основі логарифма. Під час розв'язування таких рівнянь важливо навчити учнів враховувати ОДЗ (підлогарифмічний вираз додатний, основа логарифма додатна і не дорівнює одиниці). Логарифмічні рівняння зазвичай зводяться до двох найпростіших типів: 1) $\log_a f(x) = b$; 2) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. У першому випадку використовують означення логарифма, звідки $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$, після чого розв'язують одержане рівняння. Важливо наголосити для учнів, що увесь підлогарифмічний вираз дорівнює a^b , а не одразу змінна, щоб уникнути помилок вигляду $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow x = a^b$, якщо $f(x) \neq x$. У другому випадку прирівнюють підлогарифмічні вирази, розв'язують одержане рівняння та враховують ОДЗ:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x), \\ \log_a f(x) &= \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Варто звернути увагу учнів, що нерівності ОДЗ не обов'язково розв'язувати, а достатньо підставити одержані корені в ці нерівності та перевірити їхню правильність. Для рівнянь вигляду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ також можливий такий спосіб розв'язування: прирівняти підлогарифмічні вирази, розв'язати одержане рівняння, зробити перевірку. Спосіб заміни змінної пропонуємо розглядати з учнями, які досягли середнього рівня навчальних досягнень з теми.

Типові помилки під час розв'язування логарифмічних рівнянь: не врахування ОДЗ, помилки в застосуванні властивостей логарифмів. Для подолання проблеми з неврахуванням ОДЗ пропонуємо або формувати в учнів звичку виконувати перевірку наприкінці розв'язування логарифмічних рівнянь, або використовувати «правило

митного контролю». Проте, якщо ми вводимо для учнів «правило митного контролю», важливо окреслити випадки, коли про нього потрібно згадувати (наприклад, що «митний контроль проходять дробі, корені та логарифми») або вводити звичку застосовувати його для будь-яких рівнянь. Якщо під час розв’язування логарифмічних рівнянь в учнів виникають систематичні помилки в застосуванні властивостей логарифмів, то варто повернутися до теми А6 змістового тематичного класифікатора завдань «Логарифмічні вирази».

Системи рівнянь, які розглядаємо в даній роботі, містять два рівняння з двома змінними. Для систем лінійних рівнянь будемо розглядати способи підстановки, додавання та графічний спосіб. Варто наголосити для учнів, що графічний спосіб зручний у завданнях на встановлення кількості розв’язків, але для знаходження розв’язків може неточним за рахунок похибки під час побудови графіків. Для систем рівнянь, де принаймні одне із рівнянь не є лінійним, застосовується, крім зазначених, метод заміни змінної. Такі завдання радимо пропонувати учням, котрі опановують тему на достатньому та високому рівнях.

Типові помилки під час розв’язування систем рівнянь: не знайдено другу змінну після знаходження першої, а у відповідь замість пари чисел записано лише, наприклад, ікси (аналогічно до рівняння); сплутано компоненти розв’язку і записано відповідь у вигляді $(y_0; x_0)$ замість $(x_0; y_0)$; за наявності кількох пар розв’язків хибно зіставлено компоненти розв’язку, наприклад записано $(x_1; y_2), (x_2; y_1)$ замість правильного запису $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$; арифметичні помилки під час додавання/віднімання рівнянь або підстановці.

Якщо в учнів виникає плутанина з елементами розв’язків, якщо їх декілька, то варто наголосити на обов’язковому використанні індексів під час розв’язування. Помилки під час додавання/віднімання рівнянь або підстановці, за нашими спостереженнями, пов’язані зазвичай з неправильним розкриттям дужок, перед якими стоїть мінус, особливо якщо учні виконують цю дію усно. Тому у випадку, коли потрібно відняти многочлен, будемо рекомендувати учням спершу записувати вираз, який віднімаємо, у дужках, а потім розкривати ці дужки зі зміною знаків. Аналогічно діємо, якщо многочлен потрібно помножити на число.

Зауважимо, що в окремі теми не винесено такі типи рівнянь: рівняння, що містять знак модуля; рівняння вигляду «добуток дорівнює нулю»; рівняння, що розв'язують графічним способом; рівняння з параметром. Це пов'язано, насамперед, з тим, що дані типи рівнянь можуть включатися до кожної з тем, наведених у змістовому тематичному класифікаторі завдань (табл. 2.2). Розглянемо детальніше місце зазначених типів рівнянь, які не винесено в окремі теми, у загальній структурі розділу «Рівняння» пропонованої практико-орієнтованої технології повторення та систематизації шкільного курсу математики.

Рівняння, що містять знак модуля. У дидактичних матеріалах до розділу виокремимо найпростіші рівняння з модулем як складову теми «лінійні рівняння», а в інших типах рівень передбачаємо, що їх можна звести до найпростішого рівняння з модулем, або розв'язати за допомогою розкриття модуля. Відповідно, під час розв'язування рівнянь, що потребують розкриття модуля, радимо звертати увагу учнів на правило розкриття модуля. Якщо виникають систематичні помилки під час розв'язування рівнянь, що містять знак модуля, за умови правильного розв'язування рівнянь відповідної теми і рівня, але без модулів, вважаємо за необхідне повторити властивості модуля та правило його розкриття і відпрацювати навички перетворення виразів із модулем.

Рівняння вигляду «добуток дорівнює нулю» також не відносимо в окрему тему, а включаємо до тієї, яка стосується умовно «найскладнішого» множника. Наприклад, рівняння $(x^2 - 16)(x + 5) = 0$ відносимо до квадратних рівнянь, оскільки за структурою розділу вони ідуть пізніше за лінійні, а рівняння $(x^2 - 25)\sqrt{x - 3} = 0$ – до ірраціональних. Натомість рівняння $(|x| - 1)(x - 7) = 0$ належить до лінійних рівнянь, оскільки обидва множники є лінійними виразами. Степеневі рівняння вищих порядків, які розв'язують розкладанням на множники, також віднесено до теми квадратних рівнянь, тобто умовно «найскладнішого» множника. Наприклад, рівняння $2x^3 + 5x^2 - 7x = 0$ після винесення спільного множника за дужки матиме вигляд $x(2x^2 + 5x - 7) = 0$ і стосуватиметься теми С2 змістового тематичного класифікатора завдань «Квадратні рівняння».

Графічний спосіб так само є складовою кожної із виокремлених тем. Він застосовується у тих ситуаціях, коли потрібно знайти кількість розв'язків, а не самі корені рівняння. Умовно завдання на застосування графічного способу можна розділити на дві категорії: 1) ті, у яких використовуються готові рисунки і які не потребують розпізнавання або побудови графіків конкретних функцій; 2) ті, що вимагають розпізнавання або побудови графіків елементарних функцій. Приклади таких завдань наведено у додатку В. У першому випадку для коригування знань достатньо розглянути алгоритм розв'язування рівнянь графічним способом і, можливо, звернути увагу учнів на назву координат і координатних осей, відповідно. У другому випадку для коригування систематичних помилок (за умови правильних результатів у завданнях першого з описаних типів) вбачаємо доцільним повернутися до матеріалів уроків, присвячених властивостям та графікам елементарних функцій і відпрацювати необхідні вміння та навички на завданнях з розділу В змістового тематичного класифікатора завдань (табл. 2.2).

Рівняння з параметром. У цьому питанні будемо дотримуватися погляду, що вводити параметри варто від початку опрацювання розділу, розглядаючи, наприклад, найпростіші лінійні та квадратні рівняння з параметром, аби долати страх перед такими завданнями, який, за нашими спостереженнями, часто присутній в учнів (Шкільний, 2015; Швець & Прус, 2016). Якщо рівняння з параметром стосується однієї теми розділу, то воно однозначно належить до неї і впливає на визначення рівня досягнень з цієї теми. Якщо рівняння з параметром є комбінованим (див. приклад 3), то результати його виконання не впливатимуть автоматично на визначення рівня досягнень з якоїсь конкретної теми, але до кожного такого завдання зазначено, з якими темами воно пов'язано і, відповідно, які матеріали може бути доречно опрацювати. Проте для коригування результатів розв'язку комбінованих рівнянь, особливо з параметром, високого рівня радимо вчителю чи репетитору працювати з учнем в індивідуальному форматі.

Зразком комбінованого завдання з параметром (приклад 1) може слугувати завдання, запропоноване в одній із сесій НМТ за 2024 рік.

Приклад 1. Знайдіть усі значення a , за яких рівняння $\frac{x^2-ax+4}{x-5} = 0$ має лише один корінь. Якщо таких значень кілька, то запишіть у відповіді їхній добуток (УЦОЯО, 2024).

Ключ: -92,8.

Для розв'язання цього завдання потрібно застосувати вміння розв'язувати і дробові раціональні, і квадратні рівняння. Оскільки загалом завдання стосується високого рівня навчальних досягнень, то правильне розв'язання цього завдання свідчитиме про високий рівень сформованості знань, умінь і навичок з обох цих тем.

Структурні особливості розробки та кодування завдань, а також логіки генерування адаптивних тестів наведено у додатку Г. Розглянемо реалізацію адаптивного тесту з теми «Рівняння» на прикладі структури пропонованого діагностичного тесту для конкретного учня (Дмитро) та висновків, які будуть відображатися на мапі розділу за результатом виконання такого тесту. У таблиці 2.4 наведено послідовність завдань, пропоновану в тесті, яка складається з трьох етапів: перший генерується автоматично з банку завдань для середнього рівня, другий – за результатами відповідей на перший цикл завдань, третій – за результатами відповідей на другий. Для завдань на відповідність зазначено також належність кожного пункту до певної теми, для комбінованих завдань відкритої форми зв'язок з конкретними темами зафіксовано в стовпчику з розшифровкою кодування.

Таблиця 2.4

Приклад структури діагностичного тесту до розділу «Рівняння»

№	Код	Розшифровка	Результат	Коментар
I етап (завдання середнього рівня генеруються автоматично з банку завдань)				
1.	C0qu_1 1) C0{1}qu_1 2) C0{2}qu_1 3) C0{3}qu_1	Завдання на відповідність середнього рівня: 1) Лінійне 2) Квадратне 3) Дробово-раціональне	1) правильно 2) правильно 3) помилка	На другому етапі тесту для лінійних і квадратних рівнянь буде запропоновано завдання достатнього рівня, для дробово-раціонального – початкового.
2.	C0qu_2 1) C0{4}qu_1 2) C0{6}qu_1 3) C0{7}qu_1	Завдання на відповідність середнього рівня: 1) Ірраціональне 2) Показникове 3) Логарифмічне	1) помилка 2) правильно 3) правильно	На другому етапі тесту для показникових і логарифмічних рівнянь буде запропоновано завдання достатнього рівня, для ірраціональних – початкового.
3.	C5qx_1	Тригонометричне рівняння середнього рівня (завдання з альтернативами)	помилка	На другому етапі тесту буде запропоновано тригонометричне рівняння початкового рівня.
4.	C8qx_1	Система рівнянь середнього рівня (завдання з альтернативами)	помилка	На другому етапі тесту буде запропоновано систему рівнянь початкового рівня.
II етап (підбираються за результатами відповідей на I етапі тесту)				
5.	C0py_1 1) C0{5}py_1 2) C0{3}py_1 3) C0{4}py_1	Завдання на відповідність початкового рівня: 1) Тригонометричне 2) Раціональне 3) Ірраціональне	1) помилка 2) правильно 3) правильно	Для раціональних та ірраціональних рівнянь визначено початковий рівень навчальних досягнень. Для тригонометричних рівнянь на мапі розділу відображатиметься результат «темою не володіє».
6.	C8px_1	Система рівняння початкового рівня (завдання з альтернативами)	правильно	З теми «Системи рівнянь» визначено початковий рівень навчальних досягнень.

№	Код	Розшифровка	Результат	Коментар
7.	C0ry_1 1) C0{1}ry_1 2) C0{6}ry_1 3) C0{7}ry_1	Завдання на відповідність достатнього рівня: 1) Лінійне 2) Показникове 3) Логарифмічне	1) правильно 2) правильно 3) помилка	На третьому етапі тесту буде запропоновано завдання високого рівня на розв'язання лінійних та показникових рівнянь. Для логарифмічних рівнянь визначено середній рівень навчальних досягнень.
8.	C2gx_1	Квадратне рівняння достатнього рівня (завдання з альтернативами)	правильно	На третьому етапі тесту буде запропоновано квадратне рівняння високого рівня.
III етап (завдання високого рівня підбираються для тем, з яких досягнуто достатнього рівня за результатами II етапу тесту)				
9.	C0sz_1	Комбіноване завдання високого рівня відкритої форми.	помилка	Дане завдання пов'язане з лінійними та квадратними рівняннями і розв'язане з помилкою на високому рівні. Тому для цих тем визначено достатній рівень навчальних досягнень.
10.	C0sz_2	Комбіноване завдання високого рівня відкритої форми.	помилка	Дане завдання пов'язане з показниковими та квадратними рівняннями і розв'язане з помилкою на високому рівні. Тому для цих тем визначено достатній рівень навчальних досягнень.

За результатами даного тесту попередньо визначено, що Дмитро не володіє знаннями, вміннями та навичками для розв'язування тригонометричних рівнянь, розв'язує раціональні та ірраціональні рівняння, а також системи рівнянь на початковому рівні, а логарифмічні рівняння – на середньому рівні навчальних досягнень, а також показує достатній рівень під час розв'язування лінійних, квадратних та показникових рівнянь. Умови завдань тесту, структура якого наведена у таблиці 2.4, та методичні коментарі до них наведено у Додатку Д.

Відповідно до визначених діагностичних рівнів навчальних досягнень (табл. 2.4) опрацювання тем «Лінійні рівняння» та «Квадратні рівняння» буде розпочинатися з систематизації знань за допомогою СЛС (див. Додаток Б), потім

Дмитро буде виконувати тренувальний тематичний тест із завданнями достатнього рівня включно. Якщо за результатами тренувальних тестів буде підтверджено достатній рівень навчальних досягнень із цих тем, він зможе продовжити їх опрацювання на високому рівні (разом з учителем або самостійно по відео-уроках) або перейти до наступної теми. Оскільки з тем «Дробові раціональні рівняння», «Ірраціональні рівняння» та «Системи рівнянь» визначено початковий рівень навчальних досягнень, а з теми «Тригонометричні рівняння» – діагностичний рівень «не опановано», то роботу з цими темами варто починати з самого початку: розглянути поступово різні випадки з прикладами, потім систематизувати розглянутий матеріал за допомогою СЛС і, врешті, відпрацювати навички розв’язування рівнянь із цих тем початкового та середнього рівня за допомогою тренувальних вправ. Після цього Дмитру пропонуються тренувальні тести із цих тем і, якщо буде підтверджено середній рівень навчальних досягнень із цих тем, то учень зможе перейти або до завдань достатнього рівня, або до наступної теми. Для показникових (достатній рівень) і логарифмічних рівнянь (середній рівень) він почне тематичне опрацювання із систематизації за допомогою СЛС, а потім перейде до тренувальних тематичних тестів. Якщо попередньо визначені діагностичні рівні буде підтверджено, Дмитро перейде до завдань вищого рівня із цих тем або до наступної теми; якщо діагностичний рівень не буде підтверджено, то продовжить працювати з завданнями цього рівня. Після опрацювання усіх тем розділу Дмитру пропонується пройти підсумковий тест до розділу «Рівняння», за результатами якого будуть остаточно визначені поточні рівні навчальних досягнень із кожної теми розділу. Він зможе повернутися до будь-якої із тем пізніше, щоб продовжити її опрацювання на вищий рівень і повторно пройти підсумковий тест до розділу.

Отже, у цьому пункті запропонована схема повторення та систематизації розділу «Рівняння», який складається із 8 тем. Учням пропонується спершу пройти діагностичний тест до розділу, за результатами якого визначається діагностичний рівень навчальних досягнень. Після цього учні опрацьовують кожну тему залежно від результатів діагностики, зміцнюючи або підвищуючи свої знання, уміння і навички з неї. Таким чином, кожен учень може рухатися у власному темпі відповідно до своїх

освітніх потреб. Завершальним етапом є виконання підсумкового тесту за всіма темами розділу, результати якого відображають поточний рівень навчальних досягнень з кожної із тем. Застосування пропонованого підходу дозволяє вчителю провести діагностику знань, умінь і навичок учнів класу та отримати швидкий зворотний зв'язок, реалізувати індивідуальну освіту траєкторію здобувачів освіти, а також оцінити прогрес учнів.

У пункті 2.2.1 ми розглянули методичні особливості повторення та систематизації кожного з типів рівнянь. Перейдемо до розгляду другої частини змістової лінії «Рівняння та нерівності». У пункті 2.2.2 буде наведено схему повторення розділу «Нерівності» та методичні особливості повторення та систематизації різних типів нерівностей.

2.2.2 Особливості повторення та систематизації окремих тем розділу «Нерівності» (згідно з класифікатором, наведеним у таблиці 2.2)

У цьому пункті наведеному теоретико-методичні особливості повторення та систематизації знань, умінь та навичок із тем розділу «Нерівності». Розглядаємо числові нерівності, властивості числових нерівностей, а також нерівності з однією змінною та їх системи і сукупності.

Завдання розділу «Нерівності» розбито на 6 тем:

- 1) Числові нерівності та їх властивості;
- 2) Лінійні нерівності;
- 3) Квадратичні нерівності;
- 4) Раціональні нерівності;
- 5) Показникові нерівності;
- 6) Логарифмічні нерівності;

Зауважимо, що системи та сукупності нерівностей ми не виокремлюємо в переліку тем, оскільки розглядаємо їх для всіх визначених типів нерівностей. Розгляд

поняття системи та сукупності нерівностей, а також перетину та об'єднання розв'язків відносимо до матеріалів теми «Лінійні нерівності».

Зазвичай для розв'язування нерівностей з однією змінною у шкільному курсі математики використовують властивості числових нерівностей та властивості функцій. Зокрема, лінійні нерівності розв'язують переважно за допомогою властивостей числових нерівностей. Квадратичні нерівності вивчаються у шкільному курсі математики у контексті властивостей та графіка квадратичної функції, тому традиційно їх розв'язують через побудову ескізу параболи. Проте на етапі повторення та систематизації можемо пропонувати учням застосовувати *метод інтервалів*. Усі інші нерівності (раціональні, показникові, логарифмічні) або зводять шляхом рівносильних перетворень до лінійних чи квадратичних, або розв'язують за допомогою методу інтервалів. Оскільки метод інтервалів є універсальним для будь-якої нерівності вигляду $f(x) < 0 (f(x) \leq 0, f(x) > 0, f(x) \geq 0)$, якщо можна розв'язати рівняння $f(x) = 0$, наведемо алгоритм його застосування та типові помилки і способи їх уникнення.

Методологічною основою методу інтервалів є властивість неперервної функції зберігати знак між двома своїми послідовними нулями. Ця властивість не обґрунтовується в школі, проте лежить в основі алгоритму, який пропонується учням. Наведемо алгоритм методу інтервалів:

1. Звести нерівність за допомогою властивостей числових нерівностей до вигляду $f(x) < 0 (f(x) \leq 0, f(x) > 0, f(x) \geq 0)$.
2. Знайти область визначення функції $f(x)$ (ОДЗ виразу в лівій частині одержаної нерівності).
3. Визначити нулі функції $f(x)$, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.
4. Зобразити на числовій прямій ОДЗ та коренями рівняння $f(x) = 0$ розбити її на інтервали. Визначити знак функції $f(x)$ на кожному з утворених інтервалів.
5. Записати відповідь, враховуючи знак нерівності та ОДЗ.

Оскільки метод інтервалів є універсальним для будь-якої нерівності вигляду $f(x) < 0 (f(x) \leq 0, f(x) > 0, f(x) \geq 0)$, якщо має розв'язки рівняння $f(x) = 0$, то

він дає можливість розв'язувати нетривіальні комплексні завдання. Наведемо приклад такого завдання, яке без застосування методу інтервалів розв'язати для учнів буде досить складно (див. приклад 2).

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-5)^2 \cdot \log_2(x-3)}{2^x - 64} \geq 0$.

Відповідь: $(3; 4] \cup \{5\} \cup (6; +\infty)$.

Розв'язання такої нерівності, на нашу думку, можна навести для учнів як мотивацію до розгляду методу інтервалів на початку опрацювання розділу «Нерівності». Хоч у межах даного розділу ще не було повторено показникові та логарифмічні нерівності, учні зможуть застосувати метод інтервалів до цієї нерівності, оскільки опрацювали показникові та логарифмічні рівняння у розділі С («Рівняння») змістового тематичного класифікатора завдань.

Типові помилки учнів під час застосування методу інтервалів пов'язані з неврахуванням строгості нерівності та ОДЗ, визначення знаків на проміжках числової прямої, втратою ізолюваних точок у нестрогих нерівностях. Тому на прикладі розв'язування даної нерівності варто звернути увагу учнів на те, що нулі функції $f(x) = \frac{(x-5)^2 \cdot \log_2(x-3)}{2^x - 64}$, а саме точки $x = 5, x = 4$ позначаємо зафарбованими, бо нерівність нестрога, а корінь многочлена зі знаменника ($x = 6$) виколотою точкою, оскільки він не входить в ОДЗ. Також у контексті врахування ОДЗ слід наголосити на позначенні на числовій прямій, що $x > 3$, адже без цього учні можуть помилково у відповідь записати перший інтервал, починаючи із мінус нескінченності. Під час визначення знаку функції $f(x)$ на кожному з інтервалів варто наголосити на підстановці перевірочних значень у весь вираз лівої частини, а також звернути увагу на дублювання знаків у точці $x = 5$. Для учнів достатнього та високого рівня навчальних досягнень можна зауважити, що зазвичай знаки нерівності чергуються, за винятком кратних коренів. Проте для учнів початкового і середнього рівня пропонуватимемо виконувати підстановку перевірочних значень із кожного проміжку, щоб уникнути механічних помилок з чергуванням знаків. Під час записування відповіді з урахуванням знаку нерівності та ОДЗ варто на цьому прикладі звернути також увагу учнів на ізолювані точки ($x = 5$ в цьому прикладі), які також

входять до остаточної відповіді в нестрогих нерівностях. Таким чином за допомогою нерівності з прикладу 2 можна проілюструвати для учнів універсальність та основні тонкощі застосування методу інтервалів. Практичне його застосування детальніше буде опрацьоване під час тематичного повторення, особливо в межах теми «Рациональні нерівності».

Розглянемо особливості розв'язування основних видів нерівностей, на які варто звернути увагу учнів під час повторення та систематизації даного розділу. Алгоритми розв'язування відповідних нерівностей наведено у структурно-логічних схемах (Додаток Е). Як і у рівняннях, будемо звертати увагу учнів на те, що перш ніж розв'язувати нерівність, варто визначити її вид. Серед типових помилок під час розв'язування нерівностей будемо далі розглядати лише ті, які не повторюють помилки в рівняннях, вважаючи, що такі помилки були виправлені раніше або продовжують коригуватися за зазначеними у пункті 2.2.1 підходами.

Числові нерівності показують співвідношення між двома числами або числовими виразами за допомогою знаків. Тому першочергово варто нагадати учням прочитання знаків нерівності, поняття строгої та нестрокої нерівності. Також слід нагадати учням, що ми вважаємо число a більшим за число b , якщо їхня різниця $a - b$ є додатною і число a меншим за число b , якщо їхня різниця $a - b$ від'ємна. Якщо ж $a - b = 0$, то вважаємо числа a і b рівними. Цей підхід зручно використовувати для порівняння громіздких числових виразів та доведення числових нерівностей. У межах цієї теми розглядаються властивості числових нерівностей та їх застосування до задач практичного змісту. У подальшому найбільш корисними для розв'язування нерівностей з однією змінною будуть такі властивості:

- 1) Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$;
- 1) Якщо $a > b$ і $c \in R$, то $a + c > b + c$;
- 2) Якщо $a > b$, $k > 0$, то $ak > bk$;
- 3) Якщо $a > b$, $k < 0$, то $ak < bk$;
- 4) Якщо $a > b$ і $b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;
- 5) Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$;

6) Якщо $a > b$, $b > 0$ і $c > d$, $d > 0$, то $ac > bd$.

Також тут розглядаються подвійні нерівності та їх застосування.

Типові помилки в завданнях на числові нерівності пов'язані зазвичай із неправильним застосуванням наведених вище властивостей числових нерівностей. Коригування таких помилок вбачаємо найбільш доцільним шляхом виконання тренувальних вправ, зокрема практично змісту, та критичного аналізу одержаних результатів. Під час застосування властивостей 6) і 7) варто наголосити, що дві нерівності можна лише додавати та множити, дії віднімання та ділення «заборонені». Також корисним буде для учнів критично аналізувати одержаний результат, адже після виконання дій віднімання або ділення часто ліва частина має менше значення за праву, що сигналізує про допущену помилку.

Лінійні нерівності місять змінну у степені, не більшому за перший і які за допомогою властивостей числових нерівностей можна звести до вигляду $x > C$ ($x \geq C$, $x < C$, $x \leq C$). На цьому етапі варто ще раз наголосити учням на правилах розкриття дужок (якщо вони є в умові завдання) та зміні знаку перед виразом після перенесення через знак нерівності. Також слід звернути увагу на те, що при перенесенні виразу через знак нерівності та множенні або діленні на додатне число знак нерівності не змінюється, а при множенні або діленні на від'ємне число знак нерівності змінюється на протилежний. У межах даної теми розглядаємо зображення на числовій прямій та відповідний запис числових проміжків, а також їх об'єднання та перетину.

Типові помилки під час розв'язування лінійних нерівностей: множення та ділення на від'ємне число без зміни знаку нерівності; плутанина зі строгістю нерівності; вибір не тієї частини числової прямої у відповідь. Помилка з незміною знаку нерівності під час множення або ділення на від'ємне число, за нашими спостереженнями, механічна, оскільки учні знають правило, але не розпізнають його застосування. У такому випадку можна запропонувати учням застосовувати принцип оберненої дії з відповідним записом вкінці рядка. Наприклад для нерівності $7 - 2x < 13$ запис розв'язання виглядатиме так:

$$7 - 2x < 13; | - 7$$

$$-2x < 6; |: (-2)$$

$$x > -3.$$

Таким чином учні більш імовірно помітять множення/ділення на від'ємне число і згадають про зміну знаку. За допомогою таких записів також зручно долати помилку, коли учні замість ділення на відомий множник виконують віднімання. Якщо такий підхід не допомагає, то можна ввести правило для учнів, що якщо в нерівності перед змінною мінус, то потрібно змінити всі знаки, включно зі знаком нерівності, а потім уже виконувати множення/ділення на додатне число. Тоді для нерівності $7 - 2x < 13$ запис розв'язання, що відображає очікуваний хід міркувань учня, виглядатиме таки чином:

$$7 - 2x < 13; -2x < 6; 2x > -6; x > -3.$$

Якщо в учнів систематично виникає помилка з вибором правильної частини числової прямої, варто спершу переконатися, що вони правильно читають знаки нерівності, причому як у звичному для нього вигляді, наприклад $x < 3$ (ікс менше трьох), так і у вигляді $3 < x$ (ікс більше трьох). Якщо знаки нерівності учні читають правильно, то слід перевірити, чи в ту сторону вони зображує розв'язок на числовій прямій. Усувати помилки з читанням нерівностей та зображенням розв'язків на числовій прямій вважаємо найбільш доцільним за допомогою діяльнісного підходу.

Квадратичні нерівності – це нерівності вигляду $ax^2 + bx + c > 0$ (або $\geq, < , \leq$), де $a \neq 0$. Також до цього виду нерівностей можна віднести нерівності, які зводяться до такого вигляду, використовуючи властивості числових нерівностей. Такі нерівності починають розглядатися в школі у зв'язку з вивченням побудови параболи. Тому традиційно квадратичні нерівності розв'язують через властивості квадратичної функції. Для цього знаходять нулі функції у правій частині (розв'язуючи рівняння $ax^2 + bx + c = 0$), схематично зображують параболу (враховуючи напрям віток, нулі функції та строгість нерівності), визначають знаки квадратичного тричлена на проміжках (частини параболи вище осі абсцис – знак «+», частини параболи нижче осі абсцис – знак «-»), після цього обирають потрібні проміжки відповідно до знаку нерівності в умові і записують відповідь.

Проте також квадратичні нерівності можна розв'язувати за допомогою методу інтервалів (алгоритм наведено на початку пункту 1.2.2), але пропускаючи перші два кроки. Четвертий крок методу інтервалів (розбиття числової прямої на інтервали та визначення знаків виразу в лівій частині нерівності на кожного із інтервалів) для квадратичних нерівностей можна автоматизувати. Якщо старший коефіцієнт додатний, то знаки будуть «+ - +», а якщо старший коефіцієнт від'ємний, то – «- + -».

Типові помилки під час розв'язування квадратних нерівностей:

1) розв'язування квадратичних нерівностей подібно до лінійних (особливо неповних квадратичних нерівностями: наприклад для нерівності $x^2 > 4$ учні роблять висновок, що $x > 2$, або для нерівності $x^2 - 2x > 0$, що $x - 2 > 0$, звідки $x > 2$);

2) для випадку, якщо дискримінант D квадратного рівняння, що відповідає квадратичній нерівності, від'ємний, учні поспішно роблять висновок про відсутність розв'язків (пряма аналогія з рівняннями), хоча розв'язками може бути або порожня множина, або вся числова пряма; також учні можуть губити розв'язок у нестрогих нерівностях з $D = 0$.

Для уникнення зазначених помилок варто наголосити, що яка б не була квадратична нерівність, потрібно або спершу накреслити ескіз параболи, а лише потім робити висновки про розв'язки нерівності, або застосувати метод інтервалів. Навички роботи з ескізом параболи для визначення розв'язків нерівності відпрацьовувати з учнями найкраще, на нашу думку, шляхом виконання практичних завдань. Також, якщо для нерівності $x^2 - 2x > 0$ учні роблять висновок, що $x - 2 > 0$, варто наголосити на «забороні» ділення на змінну в нерівностях через те, що нам наперед невідомий знак змінної, а в нерівностях, на відміну від рівнянь, це критично важливо.

Раціональні нерівності можемо умовно поділити на цілі раціональні (можна звести до вигляду, де в лівій частині многочлен або добуток лінійних множників, а в правій частині нуль) та дробові раціональні (містить змінну в знаменнику дробу). Основним методом розв'язування раціональних нерівностей для учнів достатнього та

високого рівня навчальних досягнень зазвичай є метод інтервалів, алгоритм застосування якого наведено на початку пункту 2.2.2. Для початкового та середнього рівня навчальних досягнень в якості основного методу розв'язування нерівностей пропонуємо застосовувати метод рівносильних сукупностей систем, оскільки з такими учнями будемо розглядати лише найпростіші приклади на кшталт $\frac{x}{x+1} > 0$.

Типові помилки під час розв'язування раціональних нерівностей методом інтервалів:

1) Розв'язування дробових раціональних нерівностей множеннями навхрест. Важливо наголосити, що навіть врахувавши ОДЗ, такий спосіб може призвести до помилки, оскільки знаменник містить змінну, а тому його знак наперед невідомий. Вато звернути увагу учнів, що такий підхід з урахуванням ОДЗ можливий під час розв'язування рівнянь, але «заборонений» під час розв'язування нерівностей;

2) Неправильне визначення знаків на інтервалах через арифметичні помилки або чергування знаків без урахування парних степенів або модулів.

3) Не врахування «ізолюваних точок» у відповідь у нестрогих нерівностях, якщо в цій точці не відбувалося чергування знаків;

4) Не відображення нулів знаменника в дробових раціональних нерівностях на числовій прямій або позначення їх зафарбованими точками, якщо нерівність в умові нестрога.

Для коригування помилок під час роботи з числовою прямою вважаємо корисним розглянути різні випадки на візуально подібних завданнях, наприклад підбірці завдань, наведених у Додатку Ж.

Розв'язування раціональних нерівностей методом рівносильних систем зводиться до розв'язування тих видів нерівностей, які ми розбирали раніше або розглянемо далі. Тому типові помилки під час застосування цього методу ми тут не виокремлюємо, оскільки вони аналогічні до помилок у тих видах нерівностей, до яких зводяться.

Показникові нерівності містять змінну в показнику степеня. Зазвичай такі нерівності зводять до вигляду 1) $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ($\geq, <, \leq$) або 2) $a^{f(x)} > b$ ($\geq, <, \leq$). У

першому випадку, використовуючи властивості показникової функції, переходять до порівняння показників залежно від основи. У другому випадку застосовують логарифмування (якщо $b > 0$) залежно від значення основи або одразу записують відповідь (якщо $b < 0$), враховуючи множину значень показникового виразу. Для учнів, які досягли середнього рівня навчальних досягнень з цієї теми та опрацьовували показникові рівняння на достатньому рівні, пропонуємо розглядати метод розкладання на множники та метод заміни змінної для розв'язування показникових нерівностей, а на високому рівні ще й однорідні показникові нерівності.

Типові помилки під час розв'язування показникових нерівностей: не зміна знаку нерівності при переході до показників, якщо основа показникового виразу менша за одиницю; хибні висновки у нерівностях, де показниковий вираз порівнюється з недодатнім числом; після заміни $a^x = t$ учні не враховують, що $t > 0$ і некоректно повертаються до заміни (або забувають повернутися до заміни і пишуть розв'язки для змінної t).

Для уникнення помилки з висновками у нерівностях вигляду $a^{f(x)} > b$ ($\geq, < , \leq$), де $b \leq 0$, пропонуємо рекомендувати учням правило «ментального світлофора», як і в рівняннях. Таким чином, якщо для нерівності $a^{f(x)} > b$ ($\geq, <, \leq$) $b > 0$, то «загоряється зелене світло» і слід розв'язувати нерівність, а якщо $b \leq 0$, то «загоряється червоне світло» і потрібно зупинитися та згадати, що показниковий вираз набуває додатних значень, а отже достатньо зробити висновок щодо правильності порівняння додатного виразу з недодатним.

Для коригування помилки зі зміною знаку при переході до показників, якщо основа менша за одиницю, вважаємо корисним нагадати зв'язок із монотонністю відповідної показникової функції. Перш ніж переходити до показників, запропонуємо учням сигналізувати стрілочкою біля нерівності, зростає чи спадає відповідна показникова функція і потім враховувати це при переході до показників.

Логарифмічні нерівності містять змінну в підлогарифмічному виразі або в основі логарифма. Варто звернути увагу учнів на врахування монотонності

логарифмічної функції та її області визначення. Логарифмічні нерівності зазвичай зводяться до таких типів: 1) $\log_a f(x) > b$ ($\geq, <, \leq$); 2) $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ($\geq, <, \leq$). У першому випадку застосовують означення логарифма, а в другому переходять до порівняння підлогарифмічних виразів. Проте в обох випадках враховують значення основи логарифма (якщо $a > 1$, то знак нерівності залишається без змін, якщо $0 < a < 1$, то знак нерівності змінюється). Крім цього, важливо наголосити для учнів на необхідності враховувати ОДЗ.

Типові помилки під час розв'язування логарифмічних нерівностей: не врахування ОДЗ, не врахування монотонності функції (не змінено знак, якщо основа менша за одиницю). Для коригування типових помилок нагадаємо учням «правило митного контролю» та застосуємо принцип із позначенням монотонності логарифмічної функції переходом до підлогарифмічних виразів аналогічно до показникових нерівностей.

Можемо помітити, що поділ на теми розділу «Нерівності» подібний до поділу на теми розділу «Рівняння» за винятком ірраціональних та тригонометричних. Як було зауважено раніше, у даній роботі ми орієнтуємося на чинну програму з математики саме рівня стандарту (МОН, 2017), де ірраціональні та тригонометричні нерівності не розглядаються. З цієї причини окремих тем, які б включали розгляд аналітичних методів розв'язання відповідних типів нерівностей, не передбачено. Проте ми не виключаємо, що нерівність, наприклад, $\sqrt{x} \geq 0,5x$ учень може розв'язати графічним способом.

Графічний спосіб для нерівностей є наскрізним для всіх тем цього розділу. Оскільки ми не виокремлюємо його як тему, то такі завдання вбачаємо доцільним віднести до завдань розділу В («Функції»), пов'язавши програмно їх також з уроком про графічний спосіб розв'язування нерівностей розділу D («Нерівності»). Як і для графічного способу, так і для аналітичних методів розв'язування нерівностей варто наголосити на позначенні (на графіку або числовій прямій) та запису розв'язків для строгих і нестрогих нерівностей. Також постійної уваги і нагадування потребує врахування області допустимих значень.

Нерівності з параметром також не винесено в окрему тему, оскільки такі завдання є в кожній із тем розділу. Як і у випадку з рівняннями, вважаємо, що нерівності з параметрами варто розглядати від найпростіших випадків, поступово нарощуючи складність відповідно до навчальних можливостей учня.

Нерівності з модулем також не виокремлюються в переліку тем розділу «Нерівності». За означенням модуля такі нерівності завжди можна звести до систем нерівностей без модуля. Але для найпростіших випадків $|x| > a$ (або $\geq, <, \leq$) та $|f(x)| > a$ (або $\geq, <, \leq$), можна застосувати геометричний зміст модуля. Найпростіші нерівності з модулем пропонуємо розглядати з усіма учнями у темі «Лінійні нерівності». Для учнів достатнього та високого рівня навчальних досягнень можна пропонувати складніші нерівності, що містять модуль і за його означенням зводяться до систем нерівностей без модуля. Такі завдання пропонуються у межах тієї теми змістового тематичного класифікатора завдань, до якої належить умовно найскладніша нерівність рівносильної системи або сукупності систем.

У кодуванні завдань та логіці генерування адаптивних тестів до розділу «Нерівності» застосовано ті ж принципи, що і для розділу «Рівняння» (див. Додаток Г). Розглянемо реалізацію адаптивного тесту до розділу «Нерівності» на прикладі пропонованого діагностичного тесту для окремого учня (Дмитро) з висновками, які відображатимуться на мапі розділу за результатами виконання такого тесту. У таблиці 2.5 наведено послідовність завдань, пропоновану в тесті, яка складається з трьох етапів: перший генерується автоматично з банку завдань для середнього рівня, другий – за результатами відповідей на перший цикл завдань, третій – за результатами відповідей на другий.

Таблиця 2.5

Приклад структури діагностичного тесту до розділу «Нерівності»

№	Код	Розшифровка	Результат	Коментар
I етап (завдання середнього рівня генеруються автоматично з банку завдань)				
1.	D2qx_3	Лінійна нерівність середнього рівня (завдання з альтернативами).	Правильно	Оскільки завдання середнього рівня розв'язано правильно, то наступна лінійна нерівність, запропонована в тесті, буде достатнього рівня.
2.	D0qy_1 1) D0{3}qy_1 2) D0{4}qy_1 3) D0{4}qy_1	Завдання на відповідність середнього рівня: 1) Квадратична нерівність; 2) Раціональна нерівність; 3) Дробово-раціональна нерівність.	1) Помилка 2) Помилка 3) Помилка	Оскільки всі пункти розв'язано з помилкою, то наступна квадратична і раціональна або дробово-раціональна нерівність буде початкового рівня.
3.	D5qx_2	Показникова нерівність середнього рівня (завдання з альтернативами).	Правильно	Наступна показникова нерівність, запропонована в тесті, буде достатнього рівня.
4.	D6qx_4	Логарифмічна нерівність середнього рівня (завдання з альтернативами).	Правильно	Наступна логарифмічна нерівність, запропонована в тесті, буде достатнього рівня.
5.	D1qx_2	Числова нерівність середнього рівня (завдання з альтернативами).	Помилка	Наступне завдання на числові нерівності та їх властивості буде відповідати початковому рівню.
II етап (підбираються за результатами відповідей на I етапі тесту)				
6.	D3rx_3	Квадратична нерівність початково рівня (завдання з альтернативами).	Правильно	Визначено початковий рівень з теми "квадратичні нерівності".

№	Код	Розшифровка	Результат	Коментар
7.	D4px_1	Дробово-раціональна нерівність початкового рівня (завдання з альтернативами).	Помилка	Відображено результат, що темою «раціональні та дробово-раціональні нерівності» не володіє. Доцільно опрацювати алгоритм застосування методу інтервалів.
8.	D1px_4	Числова нерівність початкового рівня (завдання з альтернативами).	Правильно	Визначено початковий рівень з теми «Числові нерівності та їх властивості».
9.	D0ry_3 1) D0{2}ry_3 2) D0{5}ry_3 3) D0{6}ry_3	Завдання на встановлення відповідності достатнього рівня: 1) Лінійна нерівність; 2) Показникова нерівність; 3) Логарифмічна нерівність.	1) Правильно 2) Помилка 3) Помилка	Оскільки лінійна нерівність достатнього рівня розв'язана правильно, то далі буде запропоновано завдання з цієї теми високого рівня, а для вмінь розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння визначено середній рівень, адже на достатньому рівні отримано хибні результати.
III етап (завдання високого рівня підбираються для тем, з яких досягнуто достатнього рівня за результатами II етапу тесту)				
10.	D2sz_1	Завдання відкритої форми з короткою відповіддю високого рівня з теми «Лінійні нерівності».	Помилка	Для теми «лінійні нерівності» зафіксовано достатній рівень, оскільки для завдання високого рівня допущено помилку.

За результатами даного тесту визначено, що Дмитро має початковий рівень володіння темами «Квадратичні нерівності» і «Числові нерівності та їх властивості», середній рівень для показникових і логарифмічних нерівностей, достатній – для лінійних і діагностичний рівень «не опановано» для раціональних нерівностей. Умови завдань тесту, структура якого наведена у таблиці 2.5, та методичні коментарі

до них наведено у Додатку К . Інший приклад реалізації тесту з теми «Нерівності» також описано у статті (Бойко, 2025 б).

Відповідно до визначених діагностичних рівнів навчальних досягнень (табл. 2.5) повторення тем «Квадратичні нерівності», «Числові нерівності та їх властивості» (початковий рівень) та «Рациональні нерівності» (діагностичний рівень «не опановано») варто починати спочатку: розглянути поступово різні випадки з прикладами, потім систематизувати розглянутий матеріал за допомогою СЛС і, врешті, відпрацювати навички розв'язування нерівностей із цих тем початкового та середнього рівня за допомогою тренувальних вправ. Після цього Дмитру пропонуються тренувальні тести із цих тем і, якщо буде підтверджено середній рівень початкових досягнень, то він зможе перейти або до завдань достатнього рівня, або до наступної теми. Для лінійних нерівностей (достатній рівень) та показникових і логарифмічних нерівностей (середній рівень) Дмитро може починати тематичне опрацювання із систематизації за допомогою СЛС, а потім переходити до тренувальних тестів. Якщо попередньо визначені діагностичні рівні буде підтверджено, Дмитро перейде до завдань вищого рівня із цих тем або до наступної теми; якщо діагностичний рівень не буде підтверджено, то продовжить працювати з тренувальними вправами цього рівня.

Після повторення та систематизації усіх тем розділу Дмитру пропонується пройти підсумковий тест до розділу «Нерівності», за результатами якого будуть остаточно визначені поточні рівні навчальних досягнень із кожної теми розділу. Він зможе повернутися до будь-якої із тем пізніше, щоб продовжити її опанування на вищому рівні і повторно пройти підсумковий тест до розділу.

Отже, у цьому пункті запропонована схема повторення та систематизації розділу «Нерівності», який складається із 6 тем. Алгоритм повторення даного розділу аналогічний до попереднього: спершу учні виконують діагностичний тест, за результатами якого визначається діагностичний рівень навчальних досягнень; потім вони опрацьовують кожну тему залежно від результатів діагностики; на завершальному етапі виконують підсумковий тест за всіма темами розділу. Під час повторення тем розділу «Нерівності» важливо застерегти учнів від механічного

переносу алгоритмів розв'язування рівнянь на нерівності, адже попри певні аналогії, в основі розв'язування нерівностей лежать інші принципи (зокрема, застосування властивостей числових нерівностей). У пунктах 2.2.1 і 2.2.2 пункту 2.2 ми розглянули методичні особливості повторення та систематизації кожного з видів рівнянь та нерівностей відповідно. Зазначимо, що реалізація описаних підходів потребує формування широкого банку завдань різних форм та рівнів складності. Одним зі способів його наповнення є клонування завдань з подібними структурою та змістом, але різними числовими даними. Для цього нами було застосовано засоби штучного інтелекту (ШІ), зокрема ChatGPT-5.1 і Gemini (Flash 2.5). Приклади реалізації повторення змістової лінії «Рівняння та нерівності» за адаптивною технологією наведено у Додатку П.

Отже, у пункті 2.2 цієї роботи відображено реалізацію адаптивної практико-орієнтованої технології повторення та систематизації шкільного курсу математики на прикладі алгебраїчної змістової лінії «Рівняння та нерівності». Перейдемо до розгляду реалізації пропонованої технології на прикладі геометричної змістової лінії. У пункті 2.3 буде наведено схему повторення розділу «Планіметрія» та методичні особливості повторення та систематизації відповідної змістової лінії.

2.3 Особливості практико-орієнтованого адаптивного повторення та систематизації курсу геометрії (на прикладі змістової лінії «Планіметрія»)

Цей пункт присвячено особливостям реалізації змістової лінії «Планіметрія» як складової курсу геометрії. Відповідно до державного стандарту (Кабінет міністрів України, 2020) та Модельних навчальних програм (Бурда та ін., 2023; Васишин та ін., 2023; Істер, 2023а, 2023б; Мерзляк та ін., 2023) систематичне вивчення планіметрії здійснюється у 7-9 класах базової середньої освіти. Фундаментальні підходи до методики вивчення планіметрії в шкільному курсі математики розглянуто в роботах О. М. Астряба (1957), О. В. Погорєлова (1982), І. Ф. Тесленка (1985), Г. Д. Глейзера (1988), З. І. Слєпкань (2006). Різні підходи до повторення та систематизації курсу

планіметрії також можемо знайти у збірниках для підготовки до ЗНО (НМТ) з математики (Гальперіна та ін., 2022; Забєлишинська та ін., 2024; Захарійченко, Репета та ін., 2022; Захарійченко, Шкільний та ін., 2022; Істер, 2021; Капіносов, 2023; Ключко, 2023; Козира, 2023), на які також опираємося в наших методичних пошуках.

У змістовому тематичному класифікаторі завдань (табл. 2.2) змістовій лінії, яка розглядається в цьому пункті, відповідає розділ Н («Планіметрія»). Повторення та систематизація матеріалу розділу також починається з діагностичного тесту та визначення діагностичних рівнів навчальних досягнень (не опановано або володіє темою на початковому, середньому, достатньому або високому рівні). Після цього учні переходять до тематичного повторення, відповідно до результатів діагностики (див. табл. 2.3). Основними засобами навчання на цьому етапі є тренувальні вправи та тренувальні тести. Після повторення усіх тем розділу «Планіметрія» учні виконують підсумковий тест, результати якого відображають поточний рівень навчальних досягнень з кожної теми. У випадку, коли одержані результати навчання відповідають запланованим, учні можуть переходити до вивчення наступного розділу І «Стереометрія». За наявності прогалин у засвоєнні окремих тем розділу Н («Планіметрія»), роботу над цим матеріалом варто продовжити. Якщо після кількох ітерацій очікуваного прогресу не спостерігається, доцільно переорієнтувати учнів на повторення та систематизацію матеріалу нового розділу, щоб уникнути їх демотивації та зниження темпу роботи. Проте варто врахувати поточний рівень навчальних досягнень з цієї змістової лінії під час формування очікуваних результатів від повторення та систематизації розділу І «Стереометрія» змістового тематичного класифікатора завдань.

Розглянемо детальніше особливості повторення та систематизації розділу Н («Планіметрія»). У межах цього розділу ми прагнемо сформувати в учнів уміння та навички застосовувати здобуті знання до розв'язування прикладних та компетентнісних задач. Для цього ми дотримуємося принципу мінімізації кількості формул для запам'ятовування, зосереджуючись на формуванні навичок їх застосування під час розв'язування задач. Проте ми усвідомлюємо, що теоретична база відіграє важливу роль у забезпеченні цілісності знань з геометрії та є важливою

складовою встановлення причинно-наслідкових зв'язків між вивченими фрагментами навчального матеріалу. Для систематизації теоретичних основ пропонуємо використовувати опорні конспекти, ментальні карти та флеш-картки (додаток М). Також вважаємо корисним для системного повторення розділів Н-І змістового тематичного класифікатора завдань розглянути спершу логічні основи геометрії. Ці питання ми пропонуємо розглядати з учнями після діагностичного тесту, але перед тематичним повторення розділу Н («Планіметрія»).

Під час розгляду логічних основ геометрії варто на простих життєвих прикладах показати учням, що таке поняття, його зміст та обсяг, а також розтлумачити, що означає означення поняття. Варто також на простих життєвих прикладах показати, що існують неозначувані поняття, до яких в геометрії відносять такі: точка, пряма, площа. Крім понять, у межах вивчення логічних основ геометрії розглядаємо, що таке твердження і якими вони бувають (істинні та хибні). Нагадаємо учням, що твердження, істинність якого встановлюється за домовленістю, називається аксіомою, а твердження, які доводять за допомогою міркувань на основі законів логіки, – теоремами. Варто також навести для учнів вимоги до аксіом та основні закони логіки, на які спираються під час доведень.

Ми не виокремлюємо логічні основи геометрії в окрему тему розділу тематичного змістового класифікатора завдань і не встановлюємо діагностичного рівня навчальних досягнень учнів з неї. Основна мета цієї частини повторення полягає в підготовці учнів до тематичної систематизації теоретичного матеріалу з геометрії. Розглядати математичні поняття та твердження будемо в основних темах розділу Н («Планіметрія»).

Відповідно до концептуальної моделі (див. п. 2.1) розділ Н («Планіметрія») містить п'ять основних тем:

- 1) Найпростіші геометричні фігури на площині;
- 2) Трикутники;
- 3) Чотирикутники;
- 4) Многокутники;
- 5) Коло та круг.

Наведемо методичні особливості повторення та систематизації кожної теми даного розділу відповідно до пропонованої адаптивної практико орієнтованої технології. Зазначимо типові помилки, які виникають в учнів та способи їх подолання.

Найпростіші геометричні фігури на площині. Під час систематизації матеріалу цієї теми акцентуємо увагу учнів на реалізації логічної структури геометрії, яка було розглянута раніше. Таким чином, повторюємо спершу неозначувані поняття, потім означення основних фігур, потім аксіоми та теореми. До неозначуваних понять планіметрії належать точка та пряма, до неозначуваних відношень – належати, лежати між, лежати по один бік. Найпростішими означуваними геометричними фігурами на площині є промінь, відрізок та кут. Також у цій темі розглядаємо з учнями означення таких понять: бісектриса кута; суміжні та вертикальні кути; паралельні прямі; перпендикулярні прямі; перпендикуляр; серединний перпендикуляр; відстань від точки до прямої; кут між прямими; кути, утворені перетином двох прямих третьою січною. У межах даної теми розглядаємо також означення кола і його радіуса, оскільки ці поняття зустрічаються у темах «Трикутники», «Чотирикутники» та «Многокутники» до детального повторення теми «Коло і круг». Після цього повторюємо з учнями аксіоми планіметрії, а потім – теореми, що стосуються властивостей суміжних та вертикальних кутів, кутів, утворених перетином двох паралельних прямих третьою січною, а також ознак паралельності прямих.

Типові помилки під час повторення геометричних фігур на площині пов'язані з ігноруванням багатоваріантності розміщення точок на прямій, променів у півплощині; помилковим використанням властивостей суміжних та вертикальних кутів; термінологічною та візуальною плутаниною пар кутів, що утворюються при перетині двох прямих січною. Якщо учні припускають лише один варіант розташування точок на прямій без зазначення цього в умові, то корисно навести «задачу-пастку» для ілюстрації важливості врахування іншого варіанту. Після цього можна ввести як правило, що якщо порядок точок на прямій не вказано в умові, необхідно розглянути всі можливі випадки їх розміщення. Аналогічно коригуємо помилку з неврахуванням багатоваріантності розміщення променів у півплощині.

Помилки із застосуванням властивостей суміжних та вертикальних кутів спричинені зазвичай формальним заучуванням формулювань їх означень і властивостей. Для коригування цих помилок зазвичай використовують контрприклад та графічні вправи на розпізнавання істотних ознак. Якщо учні плутають назви та зображення кутів, утворених перетином двох прямих третьою січною, корисно використовувати словесні маркери та кольорові позначення. Також варто зауважити для учнів, що властивості внутрішніх різносторонніх, внутрішніх односторонніх та відповідних кутів застосовуються лише для випадку перетину січною паралельних прямих.

Трикутники. Це ключова тема шкільного курсу планіметрії, оскільки трикутник є базовою фігурою, а будь-який складніший багатокутник можна розділити на трикутники. Крім того, трикутні конструкції мають широке застосування в житті, тому розв'язування прикладних і компетентнісних задач з цієї теми готує учнів не лише до академічних успіхів, а і вирішення життєвих задач. Розглянемо послідовність повторення та систематизації теми «Трикутники».

Повторення цієї теми пропонуємо здійснювати від загального до часткового. Таким чином спершу розглядаємо з учнями довільний трикутник, зокрема його означення та види, поняття периметру трикутника, теорему про суму кутів та нерівність трикутника, зовнішній кут трикутника та його властивість. Після цього пропонуємо учням пригадати означення, зображення та властивості основних відрізків трикутника (медіана, бісектриса, висота, середня лінія). Важливо звернути увагу учнів на розташування висот у тупокутному трикутнику. Також нагадуємо учням особливі точки трикутника (центр мас, інцентр, ортоцентр, центри вписаного та описаного кіл). Після цього відбувається повторення понять рівності та подібності трикутників і відповідні ознаки. Далі розглядаються засоби розв'язування довільних трикутників: теорема косинусів; теорема синусів; формули площі трикутника.

Після повторення основних понять і формул, що стосуються довільних трикутників, переходимо до систематизації знань учнів стосовно рівнобедреного, рівностороннього та прямокутного трикутників. Вважаємо корисним зауважити для учнів, що розглянуті властивості, формули та теореми для довільного трикутника автоматично поширюються і на «особливі види» трикутників, проте за рахунок

характерних властивостей рівнобедреного, рівностороннього та прямокутного трикутників, деякі обчислення будуть простішими. Наприклад, теорема Піфагора для прямокутного трикутника (як частковий випадок теореми косинусів) та тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника (як частковий випадок теореми синусів).

Типові помилки під час повторення теми «Трикутники» складно виокремити за рахунок великого обсягу навчального матеріалу. Зазвичай помилки, які допускають учні, мають технічний характер (наприклад, арифметичні помилки) або стосуються знання та розуміння. Прикладом поширених арифметичних помилок є такі: знаходження квадрата катета як суми квадратів гіпотенузи та іншого катета, а не їх різниці; не врахування від'ємного значення косинуса тупого кута в теоремі косинусів. До помилок, що стосуються знання та розуміння, належать, наприклад, такі: плутанина відрізків трикутника та їх властивостей, не застосування відомих властивостей, помилковий вибір формули площі або теореми для розв'язування довільного трикутника. Також до хибного розв'язування задачі учнів можуть підштовхувати неправильно виконані малюнки до задачі (зображення прямокутного трикутника замість довільного, бісектриси як медіани тощо).

Якщо учні систематично допускають арифметичні помилки під час розв'язування геометричних задач, можна запропонувати їм роботу на пошук помилок у готових розв'язках задля формування навички самоперевірки. Також корисним може бути використання ключових питань або фраз під час виконання завдань та аналіз правдоподібності кінцевого результату. Коригування помилок на знання та застосування формул і властивостей, а також помилок у побудові малюнків найкраще, на нашу думку, здійснювати за допомогою діяльнісного підходу з постійним зворотним зв'язком від учителя.

Чотирикутники. Ця тема є важливою для розвитку логічного мислення учнів, оскільки вимагає розуміння родово-видових відношень між фігурами та усвідомленого застосування їхніх властивостей і ознак. Систематизація знань з цієї теми базується на переході від загального до часткового. Таким чином, під час повторення пропонуємо спершу розглядати довільний чотирикутник, потім

паралелограм та його види і трапецію та її види. Для довільного чотирикутника повторюємо з учнями його означення та види, теорему про суму кутів чотирикутника, поняття периметра та діагоналі чотирикутника, а також формулу площі для довільного опуклого чотирикутника. Також нагадуємо учням умови, коли в чотирикутник можна вписати коло та описати навколо нього. Після цього переходимо до часткових випадків чотирикутників: паралелограма та трапеції.

Повторюючи паралелограми, важливо слідкувати, щоб учні усвідомлювали родово-видові зв'язки між фігурами (наприклад, що будь-який паралелограм є чотирикутником, але не навпаки; квадрат є одночасно прямокутником, ромбом і паралелограмом). Першочергово розглядаємо з учнями паралелограм, його означення та властивості. Потім повторюємо ознаки паралелограма, звертаючи увагу учнів на відмінність між властивістю та ознакою. Після цього по-черзі розглядаємо з учнями прямокутник та ромб, зокрема їх означення, властивості та ознаки. Слід звернути увагу учнів, що для цих фігур мають місце усі властивості паралелограма, але також вони мають власні характерні властивості. Розглядаючи квадрат, варто зауважити для учнів, що він є одночасно і ромбом, і прямокутником та поєднує властивості обох цих фігур. Родово-видові зв'язки між паралелограмом та його видами зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера-Венна або структурно-логічної схеми (див. Додаток М), що наочно демонструють підпорядкованість множин і успадкування властивостей. Після систематизації властивостей та ознак, радимо доповнити цю ж схему формулами площ. Варто звернути увагу учнів, що формули площі прямокутника, ромба і квадрата є адаптацією формул площі паралелограма з урахуванням характерних особливостей даних фігур.

Для трапеції повторюємо з учнями її означення, елементи та види. Потім розглядаємо властивості, ознаки та формули площі довільної, рівнобічної та прямокутної трапецій. Крім того повторюємо з учнями поняття середньої лінії трапеції та її властивість.

Типові помилки з теми «Чотирикутники» також важко виокремити через великий обсяг теми. Зазвичай помилки, які допускають учні, мають технічний характер (зокрема, арифметичні) або стосуються знання та розуміння (зокрема, під

час побудови малюнків). Для усунення помилок технічного характеру корисно формувати в учнів навички самоперевірки та, за потреби, повернутися до окремих питань розділу А («Числа та вирази») змістового тематичного класифікатора завдань. Серед помилок, що стосуються знання та розуміння, наприклад такі: плутанина між властивостями різних чотирикутників; хибне використання елементів чотирикутника у формулах площі; зображення на малюнку чотирикутника, який не відповідає умові, плутанина між властивостями та ознаками фігур тощо. Такі помилки, на нашу думку, варто коригувати за допомогою діяльнісного підходу зі зворотним зв'язком учителя (наприклад, під час виконання тренувальних вправ).

Многокутники. Ця тема є узагальненням та розширенням двох попередніх. Трикутник і чотирикутник також є многокутниками, проте в даній темі ми також розглядаємо n -кутники, де $n > 4$. Під час повторення цієї теми розглядаємо спершу поняття довільного n -кутника, потім опуклого n -кутника і, врешті, правильних n -кутників. Спершу повторюємо з учнями означення многокутника та його види, потім для опуклого многокутника – формулу суми внутрішніх кутів, суму зовнішніх кутів та формулу для обчислення кількості діагоналей. Після цього переходимо до повторення правильних многокутників, зокрема їх означення, формул градусної міри внутрішнього кута та центрального кута правильного n -кутника. Далі пригадуємо з учнями означення вписаного та описаного кола і зауважуємо, що їх центри в правильних многокутниках збігаються.

Метричні співвідношення сторін та радіусів вписаного та описаного кіл для правильного многокутника в загальному вигляді пропонуємо розглядати лише учням достатнього та високого рівнів навчальних досягнень. Для учнів початкового та середнього рівнів навчальних досягнень вважаємо достатнім розглянути формули радіусів вписаного та описаного кіл для правильних трикутника, чотирикутника та шестикутника. Під час повторення правильних многокутників варто звернути увагу учнів, що правильний n -кутник при $n \rightarrow \infty$ «наближається» до кола, а правильний плоский n -кутник – до круга. На прикладі задач на знаходження площі n -кутника, де $n > 4$, також слід акцентувати увагу учнів на властивості скінченної адитивності площі многокутника.

Типові помилки під час повторення теми «Многокутники»: застосування формули внутрішнього кута правильного n -кутника для довільних многокутників; помилки в записі формул суми кутів і кількості діагоналей опуклого многокутника; плутанина між формулами радіусів вписаного та описаного кіл. Якщо учні допускають помилку в записі формули суми кутів опуклого n -кутника, то можна запропонувати їм робити самоперевірку на прикладі $n = 3$ та $n = 4$, оскільки вони знають, чому дорівнюють суми кутів трикутника та чотирикутника. Звертаємо увагу учнів, що ця ж формула, але з діленням на n , застосовується для знаходження внутрішнього кута лише правильного n -кутника. Помилка в застосуванні формули кількості діагоналей зазвичай пов'язана з механічною заученістю без розуміння комбінаторного змісту формули. Для уникнення цієї помилки вважаємо корисним поєднати комбінаторне виведення формули з наочністю. Для коригування помилок із застосуванням формул радіусів вписаного та описаного кіл вважаємо зручним виділяти в будь-якому правильному n -кутнику прямокутний трикутник, утворений радіусом описаного кола R , радіусом вписаного кола r та половиною сторони $\frac{a_n}{2}$.

Коло та круг. Ця тема є підсумковою у розділі Н («Планіметрія») змістового тематичного класифікатора. Тому закономірно, що і теоретичний матеріал, і завдання до цієї теми можуть бути пов'язані з попередніми. Повторення даної теми пропонуємо починати з означень кола і круга та їх елементів. Потім розглядаємо з учнями взаємне розташування двох кіл, кола та прямої, а також властивості хорд, дотичних, січних, центральних та вписаних кутів. Властивості кутів, утворених хордами та січними, на нашу думку, варто розглядати з учнями на достатньому рівні початкових досягнень. У межах цієї теми також нагадуємо учням властивості та ознаки вписаного та описаного кіл для чотирикутників. Хоч ми про них згадували і в темі «Чотирикутники», проте на даному етапі повторення ці твердження можна закріпити доведенням. Наостанок повторюємо з учнями формули довжини кола та дуги кола, площі круга та кругового сектора. Для учнів високого рівня навчальних досягнень можна також пропонувати задачі на знаходження площі кругового сегмента.

Типові помилки під час повторення теми «Коло і круг» пов'язані із неправильним застосуванням теореми про вписаний кут; невикористанням або некоректним застосуванням властивостей хорд, дотичних, січних; плутаниною між формулами довжини кола і дуги кола, площі круга і кругового сектора. Якщо учні ототожнюють градусну міру вписаного кута з градусної мірою центрального кута або використовують твердження, що вписані кути, які спираються на однакові за довжиною хорди, обов'язково рівні, не враховуючи, що одна хорда стягує дві дуги, корисно проілюструвати відповідні властивості за допомогою програм для динамічної геометрії. Помилки у формулюванні теорем про пропорційність відрізків хорд, що перетинаються, та квадрат дотичної пов'язані зазвичай з формальним сприйняттям буквених позначень без прив'язки до геометричних відрізків. Основними способами подолання цих помилок є вербальне формулювання теорем та виконання завдань з поступовим збільшенням рівня самостійності учнів. Для уникнення плутанини між формулами довжини кола та площі круга і довжини дуги та площі сектора пропонуємо учням уважно слідкувати за розмірністю, адже довжини є «лінійними» величинами, а площі – «квадратними».

Таблиця 2.6

Приклад структури діагностичного тесту до розділу «Планіметрія»

№	Код	Розшифровка	Результат	Коментар
I етап (завдання середнього рівня генеруються автоматично з банку завдань)				
1.	H1qx_3	Завдання з вибором однієї правильної відповіді середнього рівня на тему «Найпростіші геометричні фігури на площині»	Правильно	Оскільки завдання середнього рівня розв'язано правильно, то на наступному етапі генерування завдань, буде запропоновано завдання з даної теми достатнього рівня складності.
2.	H2qx_5	Завдання з вибором однієї правильної відповіді середнього рівня на тему «Трикутники»	Правильно	Перше завдання на трикутники середнього рівня розв'язано правильно, проте формувати висновок про досягнення даного рівня з цієї теми будемо після виконання другого завдання середнього рівня.

№	Код	Розшифровка	Результат	Коментар
3.	H3qx_2	Завдання з вибором однієї правильної відповіді середнього рівня на тему «Чотирикутники»	Правильно	Перше завдання на чотирикутники середнього рівня розв'язано правильно, проте сформулювати висновок про досягнення даного рівня з цієї теми будемо після виконання другого завдання середнього рівня.
4.	H4qx_5	Завдання з вибором однієї правильної відповіді середнього рівня на тему «Многокутники»	Помилка	Оскільки завдання середнього рівня виконано з помилкою, то на другому етапі буде запропоновано завдання на многокутники початкового рівня.
5.	H0qy_2 1) H0{2}qy_2 2) H0{3}my_2 3) H0{5}qy_2	Завдання на відповідність середнього рівня: 1) Трикутники; 2) Чотирикутники; 3) Коло і круг.	1) Правильно 2) Правильно 3) Правильно	У цьому номері вдруге запропоновані завдання на трикутники та чотирикутники, які виконані правильно, тому за результатами двох правильно виконаних завдань середнього рівня з цих тем, на наступному етапі будуть запропоновані завдання достатнього рівня для тем «Трикутники» та «Чотирикутники». Так само завдання достатнього рівня будуть з теми «Коло і круг», оскільки завдання середнього рівня виконано правильно.
II етап (підбираються за результатами відповідей на I етапі тесту)				
6.	H4rx_6	Завдання з вибором однієї правильної відповіді початкового рівня на тему «Многокутники»	Правильно	З теми «Многокутники» попередньо буде визначено початковий рівень навчальних досягнень.

№	Код	Розшифровка	Результат	Коментар
7.	H1gx_2	Завдання з вибором однієї правильної відповіді достатнього рівня на тему «Основні поняття планіметрії»	Помилка	З теми «Основні поняття планіметрії» попередньо визначено середній рівень навчальних досягнень, оскільки завдання достатнього рівня виконано з помилкою.
8.	H0ry_1 1) H0{2}ry_1 2) H0{3}ry_1 3) H0{5}ry_1	Завдання на відповідність достатнього рівня: 1) Трикутники; 2) Чотирикутники; 3) Коло і круг.	1) Помилка 2) Правильно 3) Правильно	З теми «Трикутники» попередньо визначено середній рівень навчальних досягнень, оскільки завдання достатнього рівня виконано з помилкою. Для тем «Чотирикутники» та «Коло і круг» буде запропоновано завдання високого рівня.
III етап (завдання високого рівня підбираються для тем, з яких досягнуто достатнього рівня за результатами II етапу тесту)				
9.	H3sz_1	Завдання відкритої форми високого рівня на тему «Чотирикутники»	Помилка	Дане завдання також пов'язано опосередковано із властивостями кола, що допустимо, оскільки для цієї теми вже досягнуто достатнього рівня. Оскільки завдання виконано з помилкою, то для теми «Чотирикутники» попередньо визначено достатній рівень.
10.	H5sz_3	Завдання відкритої форми високого рівня на тему «Коло і круг»	Помилка	Дане завдання також пов'язано опосередковано із властивостями трапеції, що допустимо, оскільки для чотирикутників уже досягнуто достатнього рівня. Також при розв'язанні буде застосовано теорему Піфагора, що також вважаємо допустимим, оскільки для трикутників досягнуто середнього рівня, якому відповідає пряме застосування теореми Піфагора. Оскільки завдання виконано з помилкою, то для теми «Коло і круг» попередньо визначено достатній рівень.

Структурні особливості розробки та кодування завдань, а також логіки генерування адаптивних тестів наведено у додатку Л. Розглянемо реалізацію адаптивного тесту до розділу «Планіметрія» на прикладі структури пропонованого діагностичного тесту для конкретного учня (Дмитро) та висновків, які будуть відображатися на мапі розділу за результатом виконання такого тесту. У таблиці 2.6 наведено послідовність завдань, пропоновану в тесті, яка складається з трьох етапів: перший генерується автоматично з банку завдань для середнього рівня, другий – за результатами відповідей на перший цикл завдань, третій – за результатами відповідей на другий. Для завдань на відповідність зазначено також належність кожного пункту до певної теми, для комбінованих завдань відкритої форми зв'язок з конкретними темами зафіксовано в стовпчику з розшифровкою кодування.

Таким чином, за результатами діагностичного тесту для учня попередньо визначено такі діагностичні рівні з темам розділу «Планіметрія»: початковий рівень навчальних досягнень для теми «Многокутники», середній рівень – для тем «Найпростіші геометричні фігури на площині» та «Трикутники», достатній рівень володіння темами «Чотирикутники» та «Коло і круг». З відповідних рівнів починатиметься для даного учня тематичне проходження цих тем за схемою, описаною в пункті 2.1 цієї роботи. Умови завдань тесту, структура якого наведена у таблиці 2.6, та методичні коментарі до них наведено у Додатку Н.

Відповідно до визначених діагностичних рівнів навчальних досягнень (табл. 2.6) опрацювання тем «Найпростіші геометричні фігури на площині» та «Трикутники» буде розпочинатися з систематизації знань за допомогою СЛС (див. Додаток І), потім Дмитро буде виконувати тренувальний тематичний тест із завданнями середнього рівня включно. Якщо за результатами тренувальних тестів буде підтверджено середній рівень навчальних досягнень із цих тем, він зможе продовжити їх опрацювання на достатньому рівні (разом з учителем або самостійно по відео-уроках) або перейти до наступної теми. Якщо середній рівень навчальних досягнень із цих тем не буде підтверджено, то варто запропонувати Дмитру опрацювати ці теми послідовного з самого початку. Опрацювання теми «Чотирикутники» цей учень також починатиме із систематизації знань за допомогою

СЛС, а потім виконуватиме тренувальні тематичні тести з завданнями достатнього рівня включно. Якщо достатній рівень навчальних досягнень буде підтверджено, то продовжить опрацьовувати тему на високий рівень або перейде до наступної теми; у протилежному випадку повернеться до опрацювання даної теми на достатньому рівні. Оскільки з теми «Многокутники» Дмитро має початковий рівень навчальних досягнень, то її опрацювання варто реалізовувати з самого початку: сформувати поняття многокутника та розглянути їх класифікацію; вивчити властивості, ознаки та основні формули; опрацювати опорні (базові) задачі; відпрацювати навички розв'язування за допомогою тренувальних вправ; систематизувати опрацьований матеріал за допомогою СЛС. Після цього учень перейде до тренувальних тестів із завданнями початкового та середнього рівня. Досягнувши середнього рівня навчальних досягнень з цієї теми Дмитро зможе продовжити її вивчення на достатньому рівні або перейти до наступної теми. З темою «Коло і круг» Дмитро буде діяти аналогічно до теми «Чотирикутники». Після підтвердження (або досягнення) достатнього рівня навчальних досягнень з цієї теми, він зможе продовжити її вивчення на високому рівні або перейти до виконання підсумкового тесту до розділу. За результатами підсумкового тесту до розділу «Планіметрія» будуть остаточно визначені поточні рівні навчальних досягнень із кожної теми розділу. Дмитро зможе повернутися до будь-якої із тем пізніше, щоб продовжити її опрацювання на вищий рівень і повторно пройти підсумковий тест до розділу.

Отже, у цьому пункті запропоновано схему повторення та систематизації розділу Н «Планіметрія» змістового тематичного класифікатора завдань, який складається із 5 тем: «Найпростіші геометричні фігури на площині», «Трикутники», «Чотирикутники», «Многокутники», «Коло і круг». Алгоритм опрацювання даного розділу аналогічний до наведених у пункті 2.2. Характерною відмінністю даного розділу від інших є наявність додаткового навчального матеріалу про логічні основи геометрії, який розглядається усіма учнями після проходження діагностичного тесту і перед тематичним повторенням основних п'яти тем.

Зауважимо, що реалізація описаного підходу до повторення та систематизації курсу планіметрії потребує формування широкого банку завдань різних форм та

рівнів складності, включно із задачами прикладного та компетентнісного змісту. Одним зі способів швидкого і якісного наповнення банку завдань вбачаємо «клонування» завдань з подібними структурою та змістом, але різними числовими даними. Дієвим інструментом для цієї задачі виступають засоби штучного інтелекту. Зокрема, для «клонування» завдань з планіметрії нами було поставлено завдання ШІ-помічнику створити задану кількість завдань такої ж форми та змісту, як запропоноване нами, але з іншими числовими даними. Для завдань на встановлення відповідності та завдань з альтернативами ми наводили інформацію про логіку отримання дистракторів та просили ШІ дотримуватися цієї логіки в розроблених ним завданнях або, якщо вона відрізнятиметься, обґрунтувати вибір дистракторів. Для виконання цих завдань були застосовані такі моделі штучного інтелекту як ChatGPT-5.1 і Gemini (Flash 2.5). Приклад реалізації повторення планіметрії за пропонованою адаптивною технологією наведено у Додатку П.

2.4 Опис і результати педагогічного експерименту

Метою педагогічного експерименту було обґрунтування та перевірка ефективності пропонованої практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики. Основні положення дисертаційного дослідження перевірялися протягом 2022-2026 років. Протягом цього часу було проведено констатувальний, пошуковий та формувальний експерименти.

Під час *констатувального експерименту* було здійснено: аналіз нормативних документів, що стосуються навчання математики, зокрема на етапі підсумкового повторення та систематизації; аналіз сучасних технологій навчання, які застосовуються під час навчання математики у старшій школі; аналіз та класифікацію видів повторення; аналіз засобів (зокрема, чинних підручників з математики для 10-11 класів та збірників для підготовки до ЗНО (НМТ)) та організаційних форм повторення та систематизації шкільного курсу математики; анкетування вчителів та учнів. У результаті проведеного аналізу було виявлено, що спосіб та зміст підсумкового повторення не регламентується нормативними документами, а

пропоновані засоби та організаційні форми реалізації повторення та систематизації є різноманітними, а їх вибір здійснюється на розсуд учителя в межах його академічної свободи. Зважаючи на різний рівень навчальних досягнень та когнітивні відмінності учнів класу, а також враховуючи особистісно-орієнтовану парадигму освіти, нами було припущено, що застосування адаптивних технологій під час повторення та систематизації стане ефективним способом реалізації індивідуальної траєкторії навчання учнів. Для розуміння, наскільки використання адаптивних технологій узгоджується з запитом учнів та вчителів, було проведено два опитування. Перелік запитань даних опитувань наведено у Додатку Р.

Результати анкетування серед учнів засвідчили, що їм комфортно працювати над завданнями з математики у різних форматах (самостійно, в колективі, наодинці з учителем), провідний формат складно визначити (рис. 2.1).

Як тобі комфортніше виконувати завдання з математики?
143 відповіді



Рис. 2.1 Результати відповідей учнів щодо комфортного навчання

Тобто для роботи з колективом учнів має сенс поєднувати форми роботи (самостійна, колективна, індивідуальні консультації). Це можливо реалізувати під час повторення та систематизації, зокрема, з використанням адаптивних технологій. Більшість учнів зазначають, що для них комфортним є помірний темп роботи на уроці, майже 26% прагнуть повільного темпу з детальними поясненнями, лише трохи більше 10% обрали швидкий темп (рис. 2.2).

Уяви ідеальний урок математики. Який темп роботи тобі підходить найбільше?

143 відповіді



Рис. 2.2 Результати відповідей учнів щодо темпу роботи на уроці

У той же час, у питанні про перешкоди в навчанні математики майже 59% зазначають занадто швидкий темп. Друге місце серед перешкод (обрали 43% респондентів) займає страх помилитися перед усім класом. Обидві ситуації можна уникнути за допомогою адаптивних технологій, оскільки так кожен учень працює за індивідуальною траєкторією і лише він та вчитель бачить допущені помилки, а також виконує завдання у власному темпі. Близько 87% опитаних учнів зазначають, що для них корисним був би застосунок, який працює як «персональний тренер» з математики: аналізує помилки і пропонує виключно ті завдання, які потрібні саме цьому учню, щоб підтягнути тему.

Запит на інструменти генерування завдань відповідно до рівня та потреб учня відображають і результати опитування вчителів. Наприклад, у питанні про інструменти, яких бракує на етапах повторення та систематизації переважна кількість пропозицій стосується різноманіття тренувальних тестів як тематичних, так і комплексних, з автоматичною генерацією та супровідними дидактичними матеріалами до них.

Виявлена потреба старшокласників у персоналізації навчання та їхня позитивна налаштованість щодо автоматизованих систем актуалізують питання наявності відповідних засобів і готовності вчителів до впровадження таких інструментів. Адже саме вчитель виступає модератором освітнього процесу та інтегратором нових технологій. Тож для розуміння стану використання вчителями математики елементів

адаптивного навчання на уроках математики у старших класах ми провели опитування серед педагогів. Відповіді респондентів на питання анкети (Додаток ?) показують що переважна більшість вчителів використовує у своїй практиці онлайн-сервіси, які самі перевіряють відповіді учнів та дають миттєвий зворотний зв'язок, причому половина з них це робить на постійній основі (рис. 2.3).

Чи доводилося вам використовувати онлайн-сервіси, які самі перевіряють відповіді учнів та показують їм помилки миттєво?
82 відповіді

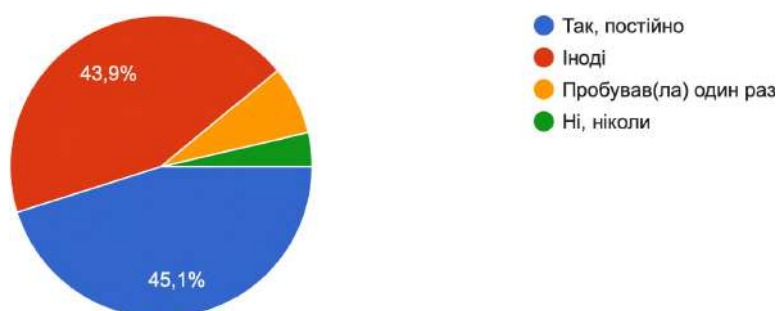


Рис. 2.3 Відповіді вчителів щодо застосування онлайн-сервісів

Проте платформи, які будують індивідуальну траєкторію для учня активно використовують близько 6% респондентів. Основними перешкодами до застосування адаптивних технологій вчителі визначають питання академічної доброчесності та доступність відповідних платформ (більшість із них англomовні або платні). А головною проблемою доступних платформ у контексті адаптивності відмічають те, що ці платформи лише тестують, проте не навчають. У питанні про основні функції ідеального, на думку респондентів, електронного помічника для вчителя математики більшість пропозицій стосуються розробки та підбору завдань під потреби учнів, складання варіантів робіт і тренувальних тестів, автоматичного пояснення помилок учню залежно від обраних варіантів, голосових підказок, адаптації наявних тестових завдань і дидактичних матеріалів під потреби учнів.

У результаті проведення констатувального експерименту було сформульовано гіпотезу наукового дослідження, його основні цілі та завдання.

Під час пошукового експерименту було розроблено авторську адаптивну практико-орієнтовану технологію повторення та систематизації шкільного курсу

математики. У межах даної розробки було сформовано змістовий тематичний класифікатор завдань, банк завдань, алгоритм реалізації підсумкового повторення та систематизації та прототип програмного засобу для реалізації пропонованої методичної розробки. Розроблена адаптивна практико-орієнтована технологія повторення та систематизації була реалізована авторкою під час освітнього процесу в комунальному закладі «Полтавський міський багатoproфільний ліцей ім. І. П. Котляревського» для учнів 11 класів. Також методичні рекомендації щодо організації підсумкового повторення та систематизації шкільного курсу математики були впроваджені в Науковому ліцеї №3 Полтавської міської ради.

Формувальний експеримент. Повний цикл повторення та систематизації шкільного курсу математики за описаною практико-орієнтованою адаптивною технологією було реалізовано протягом 2023-2026 років на базі комунального закладу «Полтавський міський багатoproфільний ліцей ім. І. П. Котляревського», а також під час індивідуальної практики. Перший етап апробації відбувався протягом 2023-2024 та 2024-2025 навчальних років і охопив 101 учня 11 класів. На цьому етапі нами перевірялося, чи має пропонована технологія позитивний вплив на навчальні досягнення учнів.

Другий етап апробації було проведено протягом 2025-2026 навчального року. Він охопив 87 учнів (42 у експериментальній групі та 45 у контрольній групі). На цьому етапі було порівняно результати повторення та систематизації учнів, які працювали за розробленою практико-орієнтованою адаптивною технологією, та учнів, для яких підсумкове повторення здійснювалося за іншими підходами.

На обох етапах апробації повторення та систематизація відбувалися протягом останньої чверті навчального року. На їх реалізацію у синхронному форматі було відведено різну кількість часу в залежності від форми навчання, кількості виділених годин і впливу зовнішніх факторів, проте за даною технологією учні могли продовжувати самостійну підготовку в позаурочний час. З огляду на невеликий обсяг вибірки і локальну географію дослідження, узагальнювати результати і робити глобальні висновки недоцільно, тому нами було застосовано метод ситуаційного аналізу (кейс-стаді). Цей підхід ґрунтується на розгляді окремих випадків, зокрема

вивченні самого процесу і стану досліджуваних під час нього, а не лише на аналізі кінцевого результату. Ситуаційний аналіз дозволяє виокремити випадки, коли застосування методу може показати позитивний результат або навпаки, що дає змогу учасникам освітнього процесу орієнтуватися на те, чи підходить дана технологія під їх умови та обставини. На підставі результатів, одержаних за допомогою кейс-стаді, можна на прикладі невеликої вибірки спрогнозувати результативність технології для ширшого кола користувачів.

Розглянемо результати першого етапу апробації (2023-2025 роки). У таблиці 2.5 наведено результати діагностичних тестів учнів, складених до застосування практико-орієнтованої адаптивної технології повторення, і результати підсумкових тестів, складених ними по завершенню циклу повторення та систематизації шкільного курсу математики. Ці види тестів мали структуру, аналогічну до сертифікаційної роботи з математики в рамках НМТ, тобто містили 22 завдання (15 з них на вибір однієї правильної відповіді, 3 – на встановлення відповідності, 4 – відкритої форми з короткою відповіддю). Відповідно, максимальна кількість балів, яку можна було отримати, становила 32 тестові бали: по 1 балу за кожне правильно виконане завдання з альтернативами, максимум 3 бали за кожне завдання на відповідність (по одному за кожну правильно визначену логічну пару), і по 2 бали за правильно виконане завдання з короткою відповіддю.

Таблиця 2.5

Результати діагностичного та підсумкового тестів

№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після
1	10	13	27	4	6	52	19	26	77	13	13
2	9	11	28	9	17	53	16	22	78	21	26
3	11	11	29	9	20	54	27	30	79	14	11
4	4	12	30	10	16	55	25	27	80	7	18
5	9	20	31	9	21	56	28	28	81	18	21
6	12	17	32	14	26	57	16	20	82	26	28
7	7	6	33	6	16	58	21	27	83	8	13

№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після	№ п/п	До	Після
8	11	15	34	4	10	59	16	16	84	18	24
9	5	6	35	13	18	60	11	22	85	16	17
10	9	16	36	17	16	61	27	26	86	7	13
11	9	18	37	21	25	62	9	19	87	25	23
12	6	8	38	16	27	63	18	26	88	17	21
13	9	11	39	14	18	64	9	21	89	7	12
14	9	11	40	13	16	65	28	27	90	5	9
15	5	7	41	20	25	66	11	21	91	17	16
16	8	13	42	20	24	67	5	14	92	29	28
17	11	10	43	17	16	68	11	22	93	13	15
18	7	15	44	8	8	69	17	24	94	17	26
19	11	12	45	16	23	70	27	28	95	18	26
20	16	32	46	16	17	71	32	28	96	15	27
21	13	28	47	11	17	72	13	19	97	13	18
22	24	32	48	18	23	73	17	26	98	10	10
23	6	6	49	6	14	74	9	14	99	17	32
24	5	9	50	28	27	75	7	18	100	9	10
25	19	21	51	17	24	76	19	23	101	8	11
26	10	9									

Щоб обрати статистичний критерій для аналізу одержаних результатів, виконаємо перевірку нормальності розподілу. Нульова гіпотеза: вибірки мають розподіл, близький до нормального. Відповідно, альтернативна гіпотеза: вибірки мають значне відхилення від нормального розподілу. Для візуальної оцінки характеру розподілу результатів побудовано гістограму з накладеною кривою нормального розподілу (рис. 2.4).

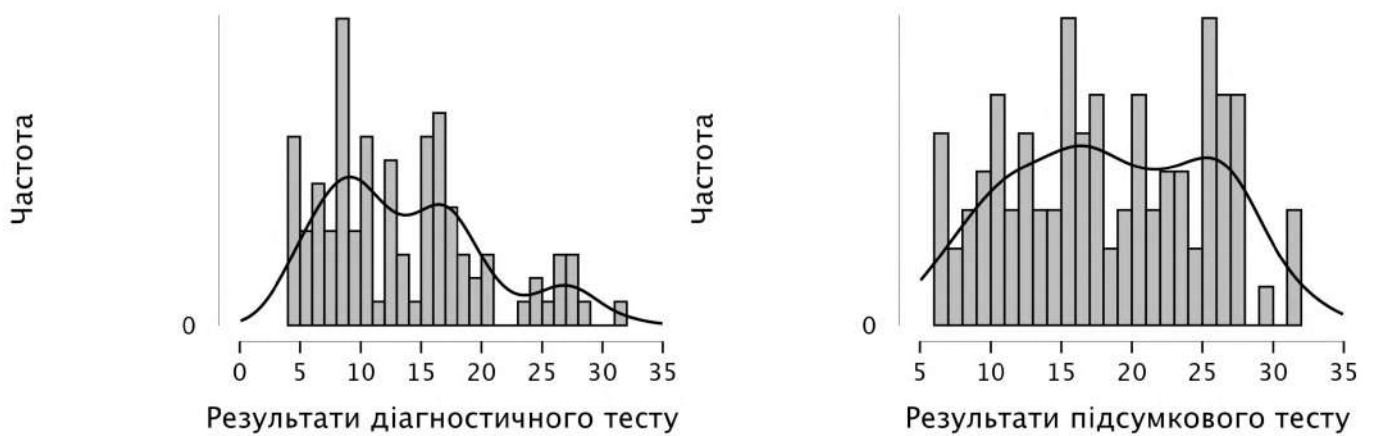


Рис. 2.4 Гістограми з накладеною кривою нормального розподілу

Гістограми обох вибірок мають відхилення від форми нормального розподілу, тож припускаємо, що нульова гіпотеза не справджується, проте перевіримо аналітично за допомогою критерія Шапіро–Уїлка. Аналіз отриманих даних було проведено за допомогою статистичного пакету JASP, що дозволяє застосувати для перевірки нормальності розподілу критерій Шапіро–Уїлка для вибірок обсягом $n > 50$. Оскільки для обох вибірок одержано $p < 0,05$, то нульову гіпотезу про нормальний розподіл відхиляємо. Відхилення емпіричних квантилей від теоретичних у крайових областях розподілу (рис. 2.5) на графіку квантилів також підтверджують отримані аналітичні висновки.

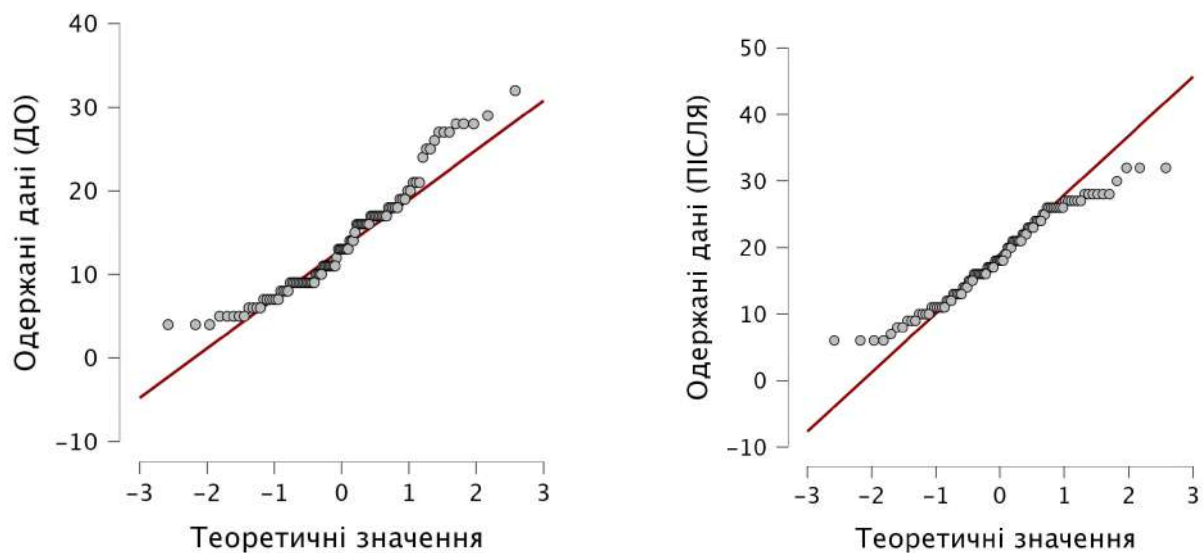


Рис. 2.5 Гістограми квантилів

Оскільки розподіл даних відрізняється від нормального, для порівняння результатів до та після експерименту було використано непараметричний Т-критерій Вілкоксона для пов'язаних вибірок. Нульова гіпотеза: розподіл результатів до та після проведення експерименту не має статистично значущих відмінностей. Відповідно, альтернативна гіпотеза: між результатами до та після проведення експерименту є статистично значущі відмінності. У результаті аналізу отримано такі статистичні показники: $W = 176, |z| = 7,755, p < 0,001$. Отримане значення z-статистики має велику абсолютну величину, що свідчить про наявність суттєвих відмінностей між результатами діагностичного та підсумкового тестування. Отже, приймаємо альтернативну гіпотезу. Оскільки середній бал підсумкового тесту (18,62) вищий за середній бал діагностичного (13,83), то спостерігаємо позитивну динаміку зміни результатів і особистого поступу учнів.

Візуалізацію цих висновків можемо побачити на boxplot-діаграмі (рис. 2.6). Як видно з графіка, після проведення експериментального впливу медіанний рівень результатів підвищився. Верхній кuartиль у вимірюванні після експерименту змістився вгору, що свідчить про покращення показників не лише в учнів із середнім рівнем підготовки, але й серед тих, хто демонструє високі результати. Також спостерігаємо збільшення міжквартильного розмаху, що може вказувати, зокрема, на більшу варіативність індивідуальних траєкторій розвитку. Максимальні значення також підвищилися та стали більш типовими для групи, що відображає загальне покращення навчальних досягнень. Отримані дані візуально підтверджують результати критерію Вілкоксона, за якими встановлено статистично значущі позитивні зміни в результатах учнів після впровадження практико-орієнтованої адаптивної технології навчання.

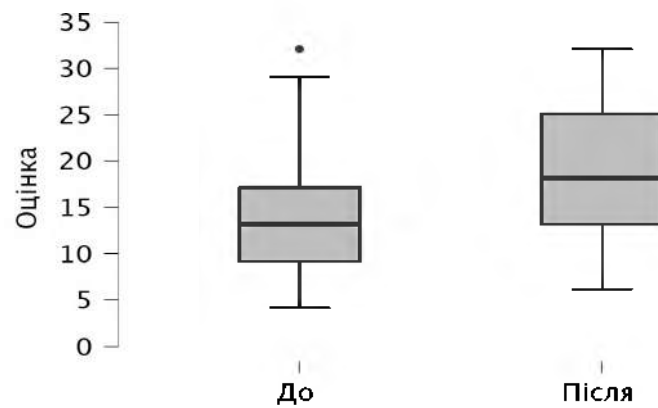


Рис. 2.6 Boxplot-діаграма змін результатів учнів

Для оцінки впливу експериментальної методики було розраховано розмір ефекту за допомогою рангово-бісеріальної кореляції. Отримане значення $-0,921$ свідчить про сильний зв'язок між впровадженням методики та зростанням навчальних досягнень учнів. Негативний знак коефіцієнта в даному контексті вказує на напрямок змін: результати підсумкового тесту (після експерименту) систематично перевищують результати діагностичного тесту (до експерименту). Такий показник розміру ефекту дає підстави стверджувати ефективність застосованої педагогічної технології повторення та систематизації для даної групи учнів.

Розглянемо детальніше у контексті ситуаційного аналізу (кейс-стаді) типові випадки траєкторій учнів під час реалізації даної технології повторення та систематизації. З таблиці 2.5 бачимо, що за динамікою результатів учнів можна розділити на три умовні групи: 1) стрімке зростання; 2) впевнений прогрес; 3) застій або регрес. Розглянемо особливості індивідуальної освітньої траєкторії в межах практико-орієнтованої адаптивної технології для представників кожної з цих груп.

Ситуація перша: «Стрімке зростання». Цей випадок стосується учнів, які з результатів переважно середнього рівня вийшли на високий рівень навчальних досягнень або з початкового – на впевнений середній чи достатній рівень навчальних досягнень. Ці учні мають значний приріст балів між діагностичним та підсумковим тестом. Наприклад, учні під номерами 4, 20, 21, 60, 64, 66, 68, 75 і 80 із таблиці 2.5, чий результати зросли вдвічі чи більше. Розглянемо особливості процесу впровадження методичної розробки для декого з них.

Учень під номером 4 підвищив свій результат із 4 балів на діагностичному до 12 балів на підсумковому. Причому з 4 правильних відповідей на діагностичному розв'язано було дві задачі шляхом логічних міркувань і нескладних обчислень, інші дві відповіді було вгадано. Після аналізу стратегії розв'язання діагностичного комплексного тесту було виявлено, що після перших «поразок» учень був демотивований і мав труднощі з концентрацією над умовами задачі. Проте подальші діагностичні роботи перед тематичним повторенням теж продемонстрували, що учень має початковий рівень зі змістових ліній «Числа та вирази», «Рівняння та нерівності» та «Планіметрія» і не досягнув початкового рівня з інших тем. З огляду на низьку мотивацію до вивчення математики і сформоване бачення учнем своєї подальшої професійної діяльності, не пов'язаної тісно, за його сприйняттям, з математикою, було прийнято рішення щодо досягнення ним середнього рівня навчальних досягнень у межах усіх змістових ліній. Також важливим аспектом для роботи з цим учнем було підвищити рівень стабільності його результатів з математики, оскільки він має труднощі з концентрацією уваги і якість його роботи піддається впливу зовнішніх факторів. Поставлена мета щодо досягнення середнього рівня навчальних досягнень у межах всіх розділів була досягнена.

Як зауважувалося раніше, даний учень мав низький рівень внутрішньої мотивації, тому реалізація описаної практико-орієнтованої адаптивної технології для нього була доповнена елементами гейміфікації, коли по досягненню середнього рівня з певного розділу він отримував наперед узгоджені винагороди. Після досягнення середнього рівня для усіх розділів було прийнято рішення продовжувати повторення на комплексних тестах із використанням завдань початкового та середнього рівня задля практичного закріплення та відпрацювання навчального матеріалу і формування стабільності результатів.

Даний кейс вважаємо успішним, оскільки кількісні результати зросли втричі, а учень стабільно демонструє середній рівень навчальних досягнень для всіх тем, якими не володів або з яких мав початковий рівень навчальних досягнень. Вважаємо, що можливість дозволити працювати учню у межах його потреб і можливостей, без

орієнтиру на вищі рівні, а також застосування елементів гейміфікації посприяли досягненню ним особистого поступу у формуванні математичних компетентностей.

Учениці під номерами 20 і 21 підвищили свої результати з 16 балів до 32 і з 13 балів до 28 відповідно. На противагу попередньому кейсу, у цих випадках мав місце високий рівень внутрішньої мотивації. Учениці систематично докладали зусилля до вивчення математики і під час уроків, і в позаурочний час, виконували в повній мірі поставлені завдання та дослухалися до рекомендацій вчителя. Зауважимо також, що у даній ситуації було помітно високий рівень довіри до вчителя.

Для учениці під номером 21 важливим етапом у досягненні результатів було подолання страху помилки і виявлення цієї помилки вчителем. До подолання цього бар'єру учениця з острахом підходила до розв'язку завдань самостійно і під час колективної роботи орієнтувалася на міркування інших, а під час індивідуальної – на підтвердження (принаймні опосередковане) своїх дій вчителем. Їй також було притаманним імпульсивно змінювати відповіді з правильних на хибні, маючи при цьому записаний належним чином розв'язок, що ілюструє невпевненість у своїх знаннях та недовіру до своїх же результатів. Ця ж учениця відмічала у спілкуванні, що на початку відчувала дискомфорт під час роботи з пропонованою практико-орієнтованою адаптивною технологією, оскільки залишалася наодинці із завданнями і в процесі їх виконання не мала зовнішнього орієнтиру, який би її скерував. Проте з часом вона помітила, що менше потребує цього зовнішнього скерування і почувається більш впевненою у власних силах під час розв'язування завдань. Ця рефлексія видалася нам важливою, оскільки подібні ситуації з недовірою учнів до своїх результатів і потребою в схваленні виконаних дій на кожному кроці, є одним із методичних викликів, які зустрічаються у власній педагогічній практиці. Тож на прикладі даного кейсу робимо висновок, що адаптивні технології можуть слугувати одним із інструментів вирішення подібних ситуацій. Учениця під номером 20, навпаки, відмічала зручність використання даного підходу від самого початку, оскільки їй характерний швидкий темп роботи (швидший за темп колективної роботи в класі) і високий рівень самостійності у виконанні завдань. Таким чином, запропонований інструмент дозволив їй працювати у комфортному для неї форматі.

Загалом обидві учениці значним чином підвищили свій кількісний результат на комплексних тестах, а також від середнього рівня навчальних досягнень для більшості розділів зросли до переважно високих результатів. Із суб'єктивних характеристик зазначали, що зросла впевненість у своїх розв'язках, знизився страх перед тестуваннями та збільшився темп виконання завдань без втрати якості. У відповідях на питання про мотивацію до вивчення математики зазначили пріоритетним те, що цей предмет знадобиться для подальшого навчання і, можливо, професійної діяльності.

Для учнів, чії результати відображені під номерами 60, 64, 66, 68 можемо спостерігати схожу тенденцію і в зміні кількісних результатів, і в прогресі рівня навчальних досягнень з кожного розділу. Одна із причин, на нашу думку, такого синхронного зростання результатів, полягає в ефективному поєднанні самостійної та групової роботи в рамках пропонованої практико-орієнтованої адаптивної технології повторення. У даних учнів великою мірою збігалися вхідні дані на початку впровадження описаної технології, а процес її реалізації вони проходили в тісній співпраці між собою, під контролем вчителя з постійним якісним зворотним зв'язком. Учні отримували консультації вчителя в груповому форматі, коли в цьому виникала потреба і, відповідно, мали обговорення результатів у межах цієї групи. Саме можливість комунікації за актуальними для себе запитами відмітила ці учні серед переваг пропонованого формату повторення. Такий відгук підштовхує до думки, що попри прагнення до автоматизації процесів у системі адаптивного повторення, важливо враховувати фактор спільноти. Справді, оскільки соціальна складова є важливою для підлітків, то варто врахувати її в організації повторення та систематизації. Інакше кажучи, автоматизовані системи варто або поєднувати з комунікацією вживу, або додати опцію формування онлайн-спільноти в межах розробленої системи. Наразі вважаємо, що розроблена система не може бути повністю автономною, а внесок вчителя в реалізацію траєкторії повторення та систематизації є необхідним.

Ситуація друга: «Впевнений прогрес». Це випадок, коли учні мають помірний зріст своїх результатів у кількісних показниках. На якісному рівні вони або

посилюють стабільність результатів у межах свого рівня знань, або підвищують рівень своїх знань, умінь і навичок у певних темах розділів. За нашими спостереженнями за процесом навчання цих учнів під час повторення та систематизації курсу математики, більшість із них систематично працює у рамках вимог, поставлених учителем, вибірково дослухаються до рекомендацій щодо додаткових завдань чи видів роботи. У більшості ці учні мають стабільні результати навчання протягом попередніх етапів освітнього процесу, а повторення та систематизацію сприймають як закономірне завершення навчання. Основною мотивацією до вивчення математики часто зазначають потребу у складанні цього предмету на НМТ, рідше – інтерес до предмету або зв'язок з майбутньою професією.

Учень під номером 24 до реалізації повторення за пропонованою практико-орієнтованою адаптивною системою мав визначений високий рівень для половини розділів і достатній рівень для решти, а по завершенню впровадження даної технології досягнув високих результатів з усіх тем. Причому результати комплексних тестів теж були стабільно високими (від 29 до 32 балів). З огляду на високі результати навчання, які він демонстрував протягом попередніх трьох років навчання у ліцеї, виникає закономірне питання, чи була дана технологія для нього корисною і, якщо так, то чим саме. Сам учень відмічає, що вагомої різниці між розв'язуванням завдань з підручника або збірника і в пропонованій системі не відчув, проте відмітив корисним, що міг працювати у власному темпі і з великою кількістю завдань. Корисним також зазначив те, що до завдань було наведено коментарі, завдяки яким у більшості випадків міг самостійно розібрати помилки. Теоретичною базою майже не користувався, проте відмітив зручність відображення необхідних тем на мапі розділу, що дозволяло планувати своє навчання. Участь учителя у траєкторії повторення в даному випадку було мінімальною. Це дозволяє розглядати даний інструмент як додатковий засіб самостійного навчання для учнів із високим рівнем знань.

Для учениці під номером 74, яка підвищила свій результат від 9 до 14 балів і досягла за оцінкою програмного засоби достатнього рівня з усіх тем, високий рівень самостійності під час роботи з адаптивною системою спрацював неоднозначно. З одного боку, ця учениця старанно і систематично працювала як із завданнями, так і з

теоретичними матеріалами, активно використовувала флеш-картки, переглядала відео-уроки, консультировалася з учителем та дослухалася до рекомендацій. А з іншого боку, маючи в доступі велику кількість додаткових матеріалів, певною мірою зловживала їх використанням. Таким чином, відбулася підміна понять, коли самостійне виконання (без учителя) сприймалося за самостійне вирішення, яке таким не було через використання додаткових матеріалів та програмних підказок.

Попри те, що реальні результати виявилися нижчими за очікувані ученицею, вона стверджує, що її робота за адаптивною технологією була для неї успішною. Зокрема, відмічає зручність самого процесу повторення і можливість здійснювати його в будь-який момент з будь-якого місця, незалежно від форми організації освітнього процесу. Також зауважує, що почала вирішувати завдання швидше без втрати якості, а рівень стресу під час проходження тестування знизився.

Попри виявлені недоліки впровадження технології відносно конкретної учениці, вважаємо цей кейс успішним, оскільки результат був покращений, а сама досліджувана отримала позитивний досвід використання розробки. Даний кейс також показує потенційні ризики використання пропонованої технології, коли учень без достатньої участі вчителя може використовувати систему не достатньо ефективно.

Ситуація третя: «Застій або регрес». Цей випадок ми ідентифікуємо за зміною результатів виконання саме комплексного тесту. При цьому рівень навчальних досягнень у межах певних розділів міг зростати.

Для учениці під номером 98 бали за діагностичний та підсумковий тести не змінилися, проте ми могли спостерігати динаміку в якісних результатах опанування певних розділів. У межах кожного розділу досягнуто середнього рівня, зокрема для тих тем, з яких до початку повторення було визначено початковий рівень або не було його досягнуто. Крім того, сама учениця відмічає, що почала впевненіше почуватися під час розв'язання завдань і дає відповіді за результатами розв'язків, а не методом підбору чи вгадування. Проте, все ж таки, під час розв'язання комплексних тестів показники не змінилися. Можливою причиною цього вбачаємо недостатній рівень систематизації знань, зокрема через пропуски великої кількості навчальних занять, де цьому було присвячено роботу. Таким чином, припускаємо, що для учнів з низькими

результатами навчальних досягнень систематизацію знань варто реалізовувати під педагогічним супроводом.

Для учнів 50, 56, 61, 65, 71 кількісні результати підсумкового тесту дещо знизилися, порівняно з діагностичним, проте залишилися на високому рівні. У межах окремих розділів вони мали на початку повторення достатній або високий рівень навчальних результатів і досягли переважно високих рівнів після реалізації педагогічної технології.

Оскільки ці учні вже мали високий рівень математичної компетентності, то етап повторення та систематизації для них був можливістю додатково потренуватися розв'язувати завдання, зокрема у контексті підготовки до НМТ. Вони відмічали, що завдання для них були переважно не складними, проте виявили користь у можливості самостійно розібратися з певними темами, де у них виникали складності. Відмічають, що рідко переглядали відео-матеріали, проте користувалися конспектами і структурно-логічними схемами. У ході спостереження за роботою даних учнів було помічено, що помилки допускалися частіше через неуважність, аніж через незнання. Причому, в більшості випадків, сприймали помилки через неуважність як випадковість, а не навичку, яку варто випрацювали.

Серед переваг використання адаптивної технології для учнів із високим рівнем знань вбачаємо можливість організувати для них інтенсивну роботу під час навчальних занять, звернути увагу на окремі аспекти в стратегії роботи з тестом (наприклад, відслідковувати помилки, тренувати уважність). Основним недоліком вважаємо недостатній рівень складності та різноманіття завдань. Оскільки ці учні починають траєкторію одразу із завдань достатнього та високого рівня і виконують їх у досить високому темпі, то розробленої наразі кількості унікальних завдань для них було недостатньо. Це зумовлює потребу в розширенні банку завдань, а також доповненні траєкторії повторення, наприклад, завданнями відкритої форми з розгорнутою відповіддю, або ж опцією включати завдання із тем профільного рівня.

Таким чином, кейси із відсутністю прогресу в результатах комплексного тесту демонструють слабкі аспекти технології під час застосування до учнів з низьким рівнем навчальних досягнень з математики або, навпаки, високим. У першому

випадку важливим є педагогічний супровід, особливо у контексті систематизації знань. У другому випадку вважаємо необхідним доповнення стандартного набору завдань додатковими опціями для учнів, що від початку демонструють стабільно високі результати.

На другому етапі апробації (2025-2026 н.р.) було порівняно результати повторення та систематизації двох груп учнів (контрольної та експериментальної). Для порівняння відмінностей результатів двох груп до та після повторення та систематизації було застосовано непараметричний критерій Манна-Вітні. За результатами діагностичного тесту статистично значущих відмінностей між рівнями математичної підготовки учнів контрольної та експериментальної груп не було виявлено ($z = 1,65 < 1,96$, $p = 0,099 > 0,05$), проте результати підсумкового тесту показали статистично значущі відмінності між результатами цих груп ($z = 3,003 > 1,96$, $p = 0,003 < 0,05$). Відмінності між показниками діагностичного та підсумкового тестів експериментальної групи, відповідно до непараметричного критерію Вілкоксона, є статистично значущими із тенденцією до зростання балів здобувачів освіти ($z = 3,63$, $p = 0,0003$). Для контрольної групи відмінності між результатами діагностичного та підсумкового тестів не мають статистичної значущості ($z = 1,283$, $p = 0,199$), тобто позитивна динаміка результатів може мати випадковий характер. Детальніше результати даного експерименту висвітлено в статі (Бойко, 2026).

Отже, результати проведеного педагогічного експерименту демонструють ефективність запропонованої практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики на прикладі вибірки зі 188 учнів 11 класів ліцеїв міста Полтави. Під час обробки результатів апробації було застосовано статистичні критерії для порівняння кількісних показників, а також метод кейс-стаді для аналізу типових освітніх траєкторій учнів. Тому попри невеликий обсяг вибірки та локальну географію дослідження, його результати дають підстави вважати, що запропоновані підходи до реалізації підсумкового повторення будуть дієвими також для майбутніх випускників.

Висновки до другого розділу

У другому розділі здійснено практичну реалізацію теоретичних засад, визначених у першому розділі. Зокрема, у пункті 2.1 описано розроблену концептуальну модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики. Створена нами концептуальна модель містить цільовий, змістовий, технологічний (процесуальний) та оцінювально-аналітичний компоненти. Цільовий та змістовий компоненти на глобальному рівні визначено нормативними документи, проте також нами сформульовано локальні цілі та зміст. У технологічному компоненті концептуальної моделі описано методи, засоби, організаційні форми та послідовність реалізації практико-орієнтованої адаптивної технології повторення та систематизації шкільного курсу математики. В оцінювально-аналітичному компоненті відображено принципи оцінювання результатів учнів та ефективності пропонованої технології.

У пунктах 2.3 та 2.3 другого розділу висвітлено особливості практико-орієнтованого адаптивного повторення курсу алгебри (на прикладі розділів «Рівняння» та «Нерівності») та геометрії (на прикладі розділу «Планіметрія»). У пункті 2.4 описано проведений педагогічний експеримент та наведено його результати.

Попри структурну подібність алгоритмів повторення та систематизації усіх розділів змістового тематичного класифікатора завдань, кожен з них має власні методичні особливості. Зокрема, здійснювати повторення розділу «Рівняння» у наших рекомендаціях ми пропонуємо за типами рівнянь переважно у тому ж порядку, як вони вивчалися у межах шкільної програми. Натомість у розділі «Нерівності» нами запропоновано вводити метод інтервалів на початку як універсальний метод, хоча в шкільному курсі математики на рівні стандарту його розглядають у старших класах після вивчення лінійних, квадратичних та дробових раціональних нерівностей в середній школі. Повторення та систематизацію розділу «Планіметрія» запропоновано починати з логічних основ геометрії, потім розглядати теми за основними типами геометричних фігур (трикутники, чотирикутники, багатокутники,

коло та круг). Характерною особливістю повторення та систематизації тем «Трикутники» та «Чотирикутники» є перехід від загального до часткового, що відрізняється від послідовності вивчення цих тем.

У пункті 2.4 другого розділу описано проведений педагогічний експеримент, який складався з трьох етапів: констатувального, пошукового, формувального. На констатувальному етапі було, зокрема, проведено опитування серед учнів та вчителів. Результати анкетування проілюстрували потребу здобувачів освіти в персоналізації траєкторії навчання задля врахування їх освітніх потреб і комфортного для них темпу навчання. За відповідями вчителів визначено запит на адаптивні елементи, у тому числі: тести з автоматичною генерацією завдань, голосові підказки, систему зворотного зв'язку з коментарями до помилок, розв'язками завдань та скеруваннями до повторення чи вивчення окремих питань.

Розроблену під час пошукового експерименту авторську адаптивну практико-орієнтовану технологію повторення та систематизації шкільного курсу математики було апробовано на 188 учнях одинадцятих класів протягом 2023-2026 років. Формувальний експеримент складався з двох етапів: 1) перевірка ефективності пропонованої технології повторення та систематизації шкільного курсу математики та аналіз типових освітніх траєкторій учнів (2023-2025 роки); 2) порівняння результатів потовщення та систематизації шкільного курсу математики за пропонованою технологією порівняно з контрольною групою (2025-2026 н.р.).

Результати експерименту показали, що адаптивний підхід до повторення та систематизації шкільного курсу математики, запропонований у дисертації, є доцільним та ефективним. Це зумовлено, зокрема, застосуванням адаптивних підходів до реалізації повторення та систематизації знань і навичок з математики, диференційованим добором завдань та забезпеченням автономності учнів у темпі опрацювання матеріалу. Аналіз поступу учнів у тематичному опрацюванні розділів та показав, що учні не лише покращували свою математичну компетентність, а і розкривали особистісні якості, зокрема впевненість у своїх результатах, уважність, відповідальність, самоконтроль. Відмічено можливість гейміфікації адаптивних елементів технології для підвищення зовнішньої мотивації учнів. Виявлено також

обмеження для учнів із високим рівнем навчальних досягнень у кількості та складності завдань. Зауважено ризики неефективної систематизації знань для учнів з початковим рівнем навчальних досягнень з математики за умови недостатнього педагогічного супроводу під час застосування пропонованої практико-орієнтованої адаптивної технології повторення.

Таким чином, розроблена адаптивна практико-орієнтована технологія повторення та систематизації шкільного курсу математики найкращим чином показала себе в роботі з учнями середнього та достатнього рівня та потребує додаткової участі вчителя для учнів початкового та високого рівнів навчальних досягнень.

ВИСНОВКИ

Відповідно до поставлених у вступі завдань у ході дослідження було одержано такі результати:

1. Вивчено стан розв'язання проблеми повторення та систематизації шкільного курсу математики у науково-методичній літературі. З'ясовано суть понять «повторення», «узагальнення», «систематизація», «педагогічна діагностика». Проведено порівняльний аналіз чинних навчальних програм, підручників, навчальних посібників тощо з метою виявлення місця і способу реалізації повторення та систематизації шкільного курсу математики в старшій профільній школі. Розглянуто види повторення та особливості їх реалізації під час вивчення математики, встановлено, що ефективне підсумкове повторення у старшій школі має передбачати не лише відтворення знань, а й їх інтеграцію, внутрішньопредметні та міжпредметні зв'язки, бути орієнтованим на практичне застосування та формування цілісної системи математичних понять та навичок.

2. Вивчено теоретичні основи застосування сучасних засобів у процесі навчання математики учнів старшої профільної школи, зокрема з'ясовано зміст поняття «технологія навчання» та «сучасні освітні технології». Систематизовано сучасні педагогічні технології у контексті їхнього застосування для повторення шкільного курсу математики.

3. Визначено психолого-педагогічні основи реалізації повторення та систематизації для учнів старшого підліткового віку, зокрема з використанням сучасних методів навчання.

4. Створено концептуальну модель повторення та систематизації шкільного курсу математики із використанням сучасних засобів навчання. Розроблено авторський підхід до формування індивідуальної траєкторії повторення за результатами педагогічної діагностики. Описано логіку кодування завдань та генерування діагностичних, тематичних та підсумкових тестів. Створено систему завдань, дидактичних матеріалів та структурно-логічних схем для реалізації

розробленої практико-орієнтованої технології адаптивного повторення та систематизації шкільного курсу математики.

5. Апробовано практико-орієнтовану технологію адаптивного повторення та систематизації шкільного курсу математики. Висвітлено дидактичні особливості впровадження пропонованої технології на прикладі змістових ліній «Рівняння та нерівності» і «Планіметрія». Впроваджено в освітній процес повний цикл підсумкового повторення шкільного курсу математики. Експериментально перевірено ефективність практико-орієнтованої технології адаптивного повторення та систематизації шкільного курсу математики.

Отримані результати дослідження дають підстави сформулювати такі

ВИСНОВКИ:

1. Проблема організації повторення та систематизації шкільного курсу математики є актуальною та недостатньо розробленою в сучасних умовах. Наявні публікації з даної тематики в науково-методичній літературі мають переважно фрагментарний характер, стосуються окремих тем або змістових ліній і не пропонують системного підходу. Зокрема, досліджень, присвячених використанню сучасних засобів навчання на етапі повторення та систематизації знань, умінь і навичок з математики нами не виявлено.

2. Уніфікованої системи повторення та систематизації шкільного курсу математики в Україні наразі не існує, проте існує великий вибір засобів і підходів до реалізації цього етапу освітнього процесу. Через це виникає потреба у вивченні згаданих засобів і підходів для вибору чи комбінації кількох із них відповідно до потреб конкретних учнів. Тому нами запропоновано конкретний підхід, який дозволяє автоматизовано будувати індивідуальну траєкторію повторення та систематизації для кожного окремого учня.

3. Застосувати усе різноманіття сучасних засобів і технологій навчання під час повторення та систематизації шкільного курсу математики доволі непросто, через що вчителі під час планування освітнього процесу стикаються з проблемою вибору цих засобів і технологій відповідно до поставлених цілей навчання. Тому в даній роботі нами пропонується авторський підхід до використання конкретних засобів і

технологій навчання, зокрема адаптивних, на етапі повторення та систематизації шкільного курсу математики. Запропонована авторська практико-орієнтована адаптивна технологія повторення та систематизації дозволяє досягати очікуваних результатів навчання та сприяє формуванню математичної компетентності учнів відповідно до їх освітніх потреб.

4. Обмеженість часового ресурсу у випускних класах та відмінності в рівні підготовки учнів зумовлюють потребу у формуванні індивідуальної освітньої траєкторії цих учнів. Дієвим інструментом реалізації такого диференційованого підходу є адаптивне повторення, яке дозволяє автоматично підлаштовувати завдання та контент під індивідуальні потреби кожного учня.

5. Розроблена концептуальна модель практико-орієнтованої адаптивної технології повторення дозволяє поєднати диференціацію завдань за змістом, формою та складністю відповідно до підготовки учнів, врахувати різний темп їх роботи, організувати навчання як в аудиторному, так і в дистанційному чи змішаному форматі. Серед ключових переваг запропонованого підходу: побудова індивідуальної траєкторії навчання, миттєвий зворотний зв'язок для учнів, мінімізація рутинних процесів для вчителя, що дозволяє зосередитися на вирішенні нетипових ситуацій, спостереженні за поступом кожного учня для врахування в плануванні подальшого освітнього процесу. Проте попри високий рівень автоматизації, запропонований підхід потребує педагогічного супроводу.

6. Результати впровадження розробленої технології підтвердили її ефективність як за кількісними показниками, так і за емоційно-психологічним сприйняттям учнів. Педагогічний експеримент, у якому взяли участь 188 учнів випускних класів ЗЗСО, засвідчив статистично значуще підвищення рівня навчальних досягнень. За допомогою ситуаційного аналізу (case study) виявлено педагогічні умови ефективного застосування методики та окреслено її обмеження.

7. Серед обмежень адаптивної практико-орієнтованої технології повторення та систематизації шкільного курсу математики слід зазначити залежність від технічного забезпечення (наявність гаджетів та доступу до мережі Інтернет) та рівня цифрової компетентності вчителя. Також авторська розробка орієнтована на

повторення та систематизацію курсу математики рівня стандарту і не враховує специфічні теми профільного рівня. Використання технології потребує попереднього вивчення програмного засобу як учителем, так і здобувачами освіти. Потенційними ризиками є недостатня кількість і складність завдань для учнів з високим рівнем навчальних досягнень, можлива втрата ефективності при надмірній автономності учня без педагогічного супроводу. Основними перевагами є можливість працювати у власному темпі, зосередитися на освітніх потребах конкретного учня, елементи гейміфікації для мотивації навчальної діяльності.

8. Розв'язання поставлених на початку роботи завдань демонструє на прикладі окремих ситуацій, що практико-орієнтована адаптивна технологія є дієвим інструментом повторення та систематизації курсу математики учнями старших класів, у тому числі під час підготовки до загальнодержавного стандартизованого оцінювання.

9. Практична цінність результатів дослідження підтверджена їх упровадженням в освітній процес закладів повної загальної середньої освіти міста Полтави та анкетуванням серед учнів та вчителів математики. Опитуваннями підтверджено запит здобувачів освіти на адаптивні підходи у навчанні, а вчителів – на різноманіття різнорівневих завдань з автоматичною генерацією та розгорнутим зворотним зв'язком, що дозволив би учням навчатися під час проходження цих тестів.

10. Перспективи подальшого дослідження полягають у кількісному та тематичному розширенні банку завдань для організації адаптивного повторення та систематизації шкільного курсу математики та інтеграції в систему глибших алгоритмів штучного інтелекту для аналізу помилок учнів.

Список використаних джерел

1. Акуленко, І., & Гнезділова, К. (2021). Результати тренувального тестування ЗНО з математики: кількісний аналіз. *Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Серія: «Педагогічні науки»*, (4), 114-119. <https://doi.org/10.31651/2524-2660-2021-4-114-119>
2. Аніщенко, О. В., & Яковець, Н. І. (2007). *Сучасні педагогічні технології: Курс лекцій*. Видавництво Ніжинського державного університету імені Миколи Гоголя.
3. Антонова, О. Є. (2015). Педагогічні технології та їх класифікація як наукова проблема. У Л. Д. Березівська (ред.), *Сучасні технології в освіті. Ч. 1. Сучасні технології навчання: наук.-допом. бібліогр. покажч.* (Вип. 2, с. 8-15). ДНПБ України ім. В. О. Сухомлинського. http://dnpb.gov.ua/wp-content/uploads/2015/11/2015_antonova_pedagogichni_tehnologii.pdf
4. Антонова, О. Є., Дубасенюк, О. А., & Семенюк, Т. В. (2003). *Професійна підготовка майбутнього вчителя до педагогічної діяльності*. Житомирський державний педагогічний університет імені Івана Франка.
5. Бевз, Г. П. (2003). *Методика викладання математики. Вища школа*.
6. Бевз, Г. П., & Бевз, В. Г. (2018). *Математика: Підручник для 10 класу*. Освіта. <https://pidruchnyk.com.ua/403-matematika-bevz-10-klas.html>
7. Бевз, Г. П., & Бевз, В. Г. (2019a). *Алгебра: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Освіта. <https://pidruchnyk.com.ua/1249-algebra-11-klas-bevz.html>
8. Бевз, Г. П., & Бевз, В. Г. (2019b). *Математика: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Освіта. <https://pidruchnyk.com.ua/453-matematika-bevz-11-klas.html>
9. Бевз, Г. П., Бевз, В. Г., Владіміров, В. М., & Владімірова, Н. Г. (2018). *Геометрія: Підручник для 10 класу*. Освіта. <https://pidruchnyk.com.ua/411-geometrya-bevz-vladmrova-10-klas.html>

10.Бевз, Г. П., Бевз, В. Г., & Владімірова, Н. Г. (2018). Алгебра: Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Освіта. <https://pidruchnyk.com.ua/1169-algebr-bevz-10-klas.html>

11.Бойко, Ю. Адаптивна технологія повторення та систематизації шкільного курсу математики та її впровадження в шкільну практику. Дидактика математики: теорія, досвід, інновації, 2026, N5, 112-123.

12.Ботузова, Ю. В. (2020). Забезпечення наступності навчання математики при підготовці до розв'язування задач ЗНО методом оцінки. *Фізико-математична освіта*, 25(3-2), 21-28.

13.Бурда, М. І. (2004). Методична система навчання математики. Педагогічна думка.

14.Бурда, М. І., Колесник, Т. М., Мальований, Ю. І., & Тарасенкова, Н. А. (2018). *Математика: Підручник для 10 класу*. Опіон. <https://pidruchnyk.com.ua/402-matematika-burda-kolesnik-malovaniy-tarasenkova-10-klas.html>

15.Бурда, М. І., Тарасенкова, Н. А., & Васильєва, Д. В. (2023). Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти. Міністерство освіти і науки України. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.proh.r.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Heometriya.7-9%20kl.Burda.ta.in.26.07.2023.pdf>

16.Бурда, М. І., Тарасенкова, Н. А., Васильєва, Д. В., & Богатирьова, І. М. (2018). *Геометрія: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Опіон. <https://pidruchnyk.com.ua/1246-geometriya-11-klas-burda.html>

17.Бусел, В. Т. (Ред.). (2005). Великий тлумачний словник сучасної української мови (250 000 слів). Перун.

18.Бутенко, Л. Л., Ігнатович, О. Г., & Швирка, В. М. (2015). Структурно-логічні схеми. Таблиці. Опорні конспекти. Есе. Навчальні презентації: рекомендації до складання. ЛНУ імені Тараса Шевченка.

19.Василишин, М. С., Миляник, А. І., Працьовитий, М. В., Простакова, Ю. С., & Шкільний, О. В. (2023). Модельна навчальна програма «Математика. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти. Міністерство освіти і науки України.

<https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Matematyka.7-9.kl.Vasylyshyn.ta.in.26.07.2023.pdf>

20.Вашуленко, О. В. (2008). Способи повторення навчального матеріалу [The method of the learning material repetition]. *Науковий вісник Чернівецького університету. Серія: Педагогіка та психологія*, (419), 23-29. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/713533/1/Способи%20повторення.pdf>

21.Верховна Рада України. (2014, 1 липня). *Про вищу освіту* (Закон України № 1556-VII). База даних «Законодавство України». <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1556-18#Text>

22.Верховна Рада України. (2020, 16 січня). *Про повну загальну середню освіту* (Закон України № 463-IX). База даних «Законодавство України». <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text>

23.Воевода, А. Л., & Струк, С. П. (2014). Застосування методу проектів у процесі навчання алгебри і початків аналізу. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми, (38), 213-217.

24.Вороненко, Т. І. (2016). Класифікація навчальних проектів. *Проблеми сучасного підручника*, (17), 76-91.

25.Гальперіна, А. Р. (2023). Математика. Типові тестові завдання у форматі НМТ. Літера ЛТД.

26.Гончаренко, С. У. (1997). Український педагогічний словник. Либідь.

27.Державна служба якості освіти України. (2023, 27 вересня). Навчальні втрати в умовах війни: як учителю їх діагностувати та компенсувати. <https://sqe.gov.ua/navchalni-vtrati-v-umovakh-viyni-yak-uchi/>

28. Дичківська, І. М. (2015). *Інноваційні педагогічні технології* (3-тє вид., випр.). ВЦ «Академія».

29.Єрмоленко, А. Б. (2022). *Інтерактивні технології навчання* [Електронний навчальний курс]. ДЗВО «Університет менеджменту освіти».

- 30.Єршова, А. П., Голобородько, В. В., Крижановський, О. Ф., & Єршов, С. В. (2018). *Геометрія: Підручник для 10 класу*. Генеза. <https://pidruchnyk.com.ua/3105-geometriia-10-klas-iershova.html>
- 31.Жукова, О. А., Павлов, В. О., Лукіянчук, А. М., & Яковліва, О. П. (2023). Психолого-педагогічний аналіз кліпового мислення як феномена сучасності. *Академічні візії*, (17). вилучено із <https://academy-vision.org/index.php/av/article/view/213>
- 32.Забелишинська, М. Я., Захарійченко, Ю. О., & Карпик, В. В. (2024). *Математика. Довідник-практикум* (2-ге вид.). Ранок.
- 33.Занюк, С. С. (2002). *Психологія мотивації*. Ельга-Н; Ніка-Центр.
- 34.Захарійченко, Ю. О., Гальперіна, А. Р., Школьний, О. В., Забелишинська, М. Я., & Карпик, В. В. (2021). *Математика. Комплексне видання*. Літера ЛТД.
- 35.Захарійченко, Ю. О., Репета, В. К., Маркова, І. С., & Карпик, В. В. (2021). *Математика: 2000 тестів для підготовки до ЗНО*. Літера ЛТД.
- 36.Захарійченко, Ю. О., Школьний, О. В., Захарійченко, Л. І., & Школьна, О. В. (2022). *Сучасна підготовка до ЗНО з математики*. Аксіома.
- 37.Захарійченко, Ю. О., Школьний, О. В., Роганін, О. М., & Дергачов, В. А. (2024). *Тестовий зошит. Усе для підготовки до НМТ в режимі онлайн і офлайн*. Ранок.
- 38.Істер, О. С. (2018). *Математика: Підручник для 10 класу*. Генеза. <https://pidruchnyk.com.ua/1154-matematyka-10-klas-ister.html>
- 39.Істер, О. С. (2019). *Математика: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Генеза. <https://pidruchnyk.com.ua/1251-matematika-11-klas-ister.html>
- 40.Істер, О. С. (2021). *Математика: комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання*. Генеза.
- 41.Істер, О. С. (2023а). *Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти*. Міністерство освіти і науки України. <https://mon.gov.ua/static->

[objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.proh.r.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Heometriya.7-9%20kl.Ister.26.07.2023.pdf](https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.proh.r.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Heometriya.7-9%20kl.Ister.26.07.2023.pdf)

42.Істер, О. С. (2023б). Модельна навчальна програма «Математика. 7-9 класи (інтегрований курс)» для закладів загальної середньої освіти. Міністерство освіти і науки України. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.proh.r.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Matematyka.7-9.kl.intehrovanyy.kurs-Ister-12.09.2023.pdf>

43.Істер, О. С. (2025). Математика. 10 варіантів у форматі НМТ. Абетка.

44.Істер, О. С., & Єргіна, О. В. (2018а). *Алгебра: Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти*. Генеза. <https://pidruchnyk.com.ua/1223-algebra-10-klas-ister.html>

45.Істер, О. С., & Єргіна, О. В. (2018б). *Геометрія: Підручник для 10 класу*. Генеза. <https://pidruchnyk.com.ua/1178-geometriya-10-klas-ister.html>

46.Істер, О. С., & Єргіна, О. В. (2019а). *Алгебра: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Генеза. <https://pidruchnyk.com.ua/1250-algebra-ister-11-klas.html>

47.Істер, О. С., & Єргіна, О. В. (2019б). *Геометрія: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Генеза. <https://pidruchnyk.com.ua/1248-geometriya-11-klas-ister.html>

48.Кабінет Міністрів України. (2011, 23 листопада). *Про затвердження Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти* (Постанова № 1392). База даних «Законодавство України». <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-п#Text>

49.Кабінет Міністрів України. (2020, 30 вересня). *Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти* (Постанова № 898). Урядовий портал. <https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>

50.Кабінет Міністрів України. (2024, 25 липня). *Про затвердження Державного стандарту профільної середньої освіти* (Постанова № 851). База

даних «Законодавство України». <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/851-2024-p#Text>

51.Капіносов, А. М., Білоусова, Г. І., Гап'юк, Г. В., Мартинюк, С. В., & Олійник, Л. І. (2023). *Математика ЗНО НМТ 2024. Комплексне видання. Підручники і посібники.*

52.Клочко, І. Я. (2023а). Математика: Тестові завдання. Ч. І. Алгебра (зовнішнє незалежне оцінювання). Навчальна книга – Богдан.

53.Клочко, І. Я. (2023b). Математика: Тестові завдання. Ч. II. Алгебра і початки аналізу (зовнішнє незалежне оцінювання). Навчальна книга – Богдан.

54.Клочко, І. Я. (2023c). Математика: Тестові завдання. Ч. III. Геометрія (зовнішнє незалежне оцінювання). Навчальна книга – Богдан.

55.Клочко, І. Я. (2023d). Математика: Тестові завдання. Ч. IV. Стереометрія (зовнішнє незалежне оцінювання). Навчальна книга – Богдан.

56.Козира, В. (2023). Математика: ЗНО 2023: навчально-методичний посібник. Астон.

57.Кравчук І. Г. (2025) *Адаптивні технології навчання на уроках математики засобами інформаційних технологій в спеціальних закладах освіти.* Адаптивне управління: теорія і практика. Серія Педагогіка. Т. 21, № 41. С. 1–24. ISSN 2707-0255. DOI: [10.33296/2707-0255-21\(41\)-14](https://doi.org/10.33296/2707-0255-21(41)-14).

58.Крамаренко, Т. Г., Корольський, В. В., Семеріков, С. О., & Шокалюк, С. В. (2019). *Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики.* Криворізький державний педагогічний університет.

59.Кудіна, В. В., Соловей, М. І., & Спіцин, Є. С. (2007). *Педагогіка вищої школи* (2-ге вид., доповн. і переробл.). Ленвіт.

60.Лебедик, Л. В., Стрельніков, В. Ю., & Стрельніков, М. В. (2020). Сучасні технології навчання і методики викладання дисциплін: Навчально-методичний посібник. АСМІ. <http://dspace.pnpu.edu.ua/handle/123456789/15703>

61.Лук'янова, С., & Філон, Л. (2023). Внутрішньопредметні зв'язки як засіб подолання освітніх втрат учнівства з математики. *Grail of Science*, (33), 335–341. <https://doi.org/10.36074/grail-of-science.10.11.2023.53>

62.Ляшенко, О. І. (2019). Адаптивне навчання як ознака сучасних дидактичних систем. *Актуальні проблеми психології. Психологічна теорія і технологія навчання*, 10(8), 185-195.

63.Мартинюк, О. (2025). Національний мультипредметний тест. Математика: тестові завдання у форматі НМТ. Підручники і посібники.

64.Михайленко, Л., Комарова, К., & Таранюк, Н. (2024). Математична тривожність учнів: причини, наслідки та шляхи подолання. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*, 2, 44-55. <https://doi.org/10.31652/3041-2277-2024-2-44-55>

65.Мерзляк, А. Г. (2018). *Математика: Підручник для 10 класу*. Гімназія. <https://pidruchnyk.com.ua/1153-matematyka-10-klas-merzlyak.html>

66.Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2018a). *Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу з поглибленим вивченням*. Гімназія. <https://pidruchnyk.com.ua/428-algebra-z-pogliblenim-vivchennyam-merzlyak-nomrovskiy-polonskiy-yakir-10-klas.html>

67.Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2018b). *Алгебра і початки аналізу: Підручник для 10 класу (профільний рівень)*. Гімназія. <https://pidruchnyk.com.ua/430-algebra-proflniy-rven-merzlyak-10-klas.html>

68.Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2018c). *Геометрія: Підручник для 10 класу (профільний рівень)*. Гімназія. <https://pidruchnyk.com.ua/1140-geometriya-10-klas-merzlyak-prof.html>

69.Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2018d). *Геометрія: Підручник для 10 класу з поглибленим вивченням*. Гімназія. <https://pidruchnyk.com.ua/1138-geometriya-10-klas-merzlyak-poglyb.html>

70.Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2019a). *Алгебра і початки аналізу: Підручник для 11 класу*. Гімназія. <https://pidruchnyk.com.ua/439-algebra-merzlyak-nomrovskiy-polonskiy-yakr-11-klas.html>

71. Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2019b). *Геометрія: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Гімназія. <https://pidruchnyk.com.ua/1247-geometriya-11-klas-merzlyak.html>

72. Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Полонський, В. Б., & Якір, М. С. (2019c). *Математика: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Гімназія. <https://pidruchnyk.com.ua/1252-matematika-11-klas-merzlyak.html>

73. Мерзляк, А. Г., Номіровський, Д. А., Пихтар, М. П., Рубльов, Б. В., Семенов, В. В., & Якір, М. С. (2023). Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти. Міністерство освіти і науки України. <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.proh.r.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Heometriya.7-9.kl.Mierzliak.ta.in.30.08.2023.pdf>

74. Міністерство освіти і науки України. (2017a). Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

75. Міністерство освіти і науки України. (2017b). Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

76. Міністерство освіти і науки України. (2017c). Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>

77. Міністерство освіти і науки України. (2023, 5 грудня). *Результати міжнародного дослідження якості освіти PISA-2022*. <https://mon.gov.ua/news/rezultati-mizhnarodnogo-doslidzhennya-yakosti-osviti-pisa-2022>

78.Міністерство освіти і науки України. (2025). *Концептуальні засади математичної освітньої галузі* (Додаток 3 до проєкту наказу). <https://mon.gov.ua/>

79.Могорита, Н. І., & Лавренова, М. В. (2017). Організація повторення навчального матеріалу у процесі початкового навчання. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: «Педагогіка. Соціальна робота»*, (1), 178-181.

80.Мойсеюк, Н. Є. (2007). *Педагогіка* (5-те вид., доповн. і переробл.). Саміт-книга.

81.Невоєнна, О. А., Добростан, О. В., & Боса, В. П. (2025). Формування метакогнітивних стратегій для підвищення ефективності самостійного навчання. *Педагогічна Академія: наукові записки*, (21). <https://doi.org/10.5281/zenodo.16976533>

82.Нелін, Є. П. (2018a). *Алгебра: Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти*. Ранок. <https://pidruchnyk.com.ua/427-algebra-neln-10-klas.html>

83.Нелін, Є. П. (2018b). *Геометрія: Підручник для 10 класу*. Ранок. <https://pidruchnyk.com.ua/413-geometrya-neln-10-klas.html>

84.Нелін, Є. П. (2018c). *Математика: Підручник для 10 класу*. Ранок. <https://pidruchnyk.com.ua/3091-matematyka-10-klas-nelin.html>

85.Нелін, Є. П., & Долгова, Н. А. (2019a). *Алгебра: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Ранок. <https://pidruchnyk.com.ua/468-algebra-neln-dolgova-11-klas.html>

86.Нелін, Є. П., & Долгова, Н. А. (2019b). *Геометрія: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Ранок. <https://pidruchnyk.com.ua/3067-geometriia-11-klas-nelin.html>

87.Нелін, Є. П., & Долгова, Н. А. (2019c). *Математика: Підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти*. Ранок. <https://pidruchnyk.com.ua/3065-matematyka-11-klas-nelin.html>

88.Нелін, Є. П., & Мажинська, О. С. (2023). Прийоми систематизації та узагальнення алгебраїчних знань та вмінь учнів в процесі їх підготовки до ЗНО з математики. *Науковий часопис Українського державного університету імені*

Михайла Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі, (26), 54-62.

89.Огієнко, О. І. (Ред.). (2015). *Інноваційні педагогічні технології*. Інститут педагогічної освіти і освіти дорослих НАПН України. <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/705810/1/Посібник.pdf>

90.Орос, В. М., Петечук, В. М., & Петечук, Ю. В. (2021). Розвиток творчих здібностей особистості засобами розвивального навчання у системі математичної освіти. *Науковий вісник Мукачівського державного університету. Серія «Педагогіка та психологія»*, 7(4), 48–56. [https://doi.org/10.52534/msu-pp.7\(4\).2021.48-56](https://doi.org/10.52534/msu-pp.7(4).2021.48-56)

91.Павленко, В. В. (2012). Становлення та розвиток ідеї розвивального навчання. *Наукові записки: Збірник праць молодих учених та аспірантів ХГПА*, (1), 164-174.

92.Паламарчук, М. І., & Хом'юк, І. В. (2020). *Проблеми та шляхи удосконалення вищої математичної освіти* (Дис. канд. пед. наук). Вінницький національний технічний університет.

93.Панова, С. О. (2018). Основні поняття евристичного навчання математики (методичний аспект). *Народна освіта*, (1), 62-68.

94.Пехота, О. М., Кіктенко, А. З., Любарська, О. М., Нор, К. Ф., Олексюк, О. Є., Ситченко, А. Л., Тарасова, Л. В., & Тихонова, Т. В. (2001). *Освітні технології: Навчально-методичний посібник* (О. М. Пехота, Ред.). А.С.К.

95.Прокопенко, І. Ф. (Ред.). (2018). *Педагогічні технології в підготовці вчителів* (3-тє вид., доповн. і переробл.). Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди.

96.Прус, А. В., & Швець, В. О. (2011). Збірник задач з методики навчання математики. Рута.

97.Прус, А. В., & Швець, В. О. (2016). Задачі з параметрами в шкільному курсі математики. Рута.

98.Раков, С. А. (2005). Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ. Факт.

99. Решетник, О. А. (2021). *Дефініції поняття «діагностика» на тлі суміжних термінів*. Криворізький державний педагогічний університет. <https://rep.knlu.edu.ua/xmlui/bitstream/handle/787878787/3000/Решетник%20О.%20А.%20Дефініції%20поняття%20>
100. Савченко, О. Я. (2012). Дидактика початкової освіти. Грамота.
101. Семенець, С. П. (2015). *Методологія і теорія розвивального навчання математики*. Видавець О. О. Євенок.
102. Симоненкова, Т. П. (2012). Узагальнення та систематизація знань, умінь і навичок учнів з української мови. Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 10: Проблеми граматики і лексикології української мови, (9), 237-241.
103. Сисоєва, С. О. (2011). Педагогічні технології у професійній підготовці. Міленіум.
104. Слєпкань, З. І. (2006). *Методика навчання математики* (2-ге вид., доповн. і переробл.). Вища школа.
105. Стрілець, С. І., Запорожченко, Т. П., & Шпеко, А. А. (2023). *Методика навчання освітньої галузі «Математика»* (2-ге вид., Ч. 1). НУЧК імені Т. Г. Шевченка.
106. Сухіна, Л. А., & Маслакай, Т. П. (2008). Система роботи вчителя із забезпечення повторення математичного матеріалу. *Збірник наукових праць «Педагогічні науки»*, (49), 318-323.
107. Тарасенкова, Н. А. (2023). Засоби формуального оцінювання у навчанні математики. *Актуальні питання природничо-математичної освіти*, 2(22), 15-24.
108. Таточенко, В. І., & Гаран, І. О. (2025). Формування складової професійної компетентності майбутніх учителів математики для розвитку здатності школярів долати математичну тривожність і навчальні бар'єри. *Педагогічні науки*, (111), 95–110. <https://doi.org/10.32999/ksu2413-1865/2025-111-14>
109. Телев'як, І. І. (2016). «Перевернутий клас» — новий крок у процесі навчання. У *Чорноморські наукові студії* (с. 87-91). Фенікс.

110. Триус, Ю. В. (2005). Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики. Брама-Україна.
111. Український центр оцінювання якості освіти. (б. д.). Офіційні звіти про результати зовнішнього незалежного оцінювання та національного мультипредметного тесту. <https://testportal.gov.ua/ofzvit/>
112. Федорчук, Е. І. (2006). Сучасні педагогічні технології. Абетка.
113. Цісарук, В. Ю., & Цісарук, І. В. (2017). Організація самостійної роботи студентів за методикою Перевернутий клас. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 13: Проблеми трудової та професійної підготовки*, (9), 91-95.
114. Чепіль, М. М., & Дудник, Н. З. (2012). *Педагогічні технології*. Академвидав.
115. Шевчук, П., & Фенрих, П. (2005). *Інтерактивні методи навчання*. WSAP.
116. Швець, В. О. (2014). Методичні основи узагальнення і систематизації знань учнів з математики. НПУ імені М. П. Драгоманова.
117. Швець, В. О., & Благодир, Л. А. (2012). Формування вмінь і навичок превентивної діяльності майбутнього вчителя математики. *Вища освіта України*, (3), додаток 2: Тематичний випуск «Педагогіка вищої школи: методологія, теорія, технології», 2, 38–46.
118. Шкільний, О. В. (2015). Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи в Україні: Монографія. НПУ імені М. П. Драгоманова.
119. Шкільний, О. В., & Захарійченко, Ю. О. (2016). Методичні рекомендації щодо створення якісних тестових завдань з математики. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*, (6), 207-220.
120. Шкільний, О. В., & Захарійченко, Ю. О. (2017). Розв'язування типових тестових завдань під час підготовки до ЗНО з математики. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі*, (18), 203-210.
121. Яцик, Т. О., & Степанюк, В. В. (2022). *Словник коротких термінів з педагогіки*. ТНПУ ім. В. Гнатюка.

122. Alegre, F., Moliner, L., Dusart, A., & Guerrero, M. (2020). Peer tutoring effects on students' mathematics anxiety: A classic and structural equation modeling meta-analysis. *Frontiers in Psychology*, 11, 1610.
123. Baddeley, A., Eysenck, M. W., & Anderson, M. C. (2020). *Memory* (3rd ed.). Psychology Press.
124. Barroso, C., Ganley, C. M., McGraw, A. L., Geer, E. A., Hart, S. A., & Daucourt, M. C. (2021). A meta-analysis of the relation between math anxiety and math achievement. *Psychological Bulletin*, 147(2), 134–168.
125. Bersin, J. (2017, March 27). *The disruption of digital learning: Ten things we have learned*. JoshBersin.com. <https://joshbersin.com/2017/03/the-disruption-of-digital-learning-ten-things-we-have-learned/>
126. Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.
127. Brown, P. C., Roediger, H. L., III, & McDaniel, M. A. (2014). *Make it stick: The science of successful learning* [Запам'ятати все: Засвоєння знань без нудьги та зазубрювання]. Harvard University Press.
128. Boiko, Yu. (2025a). Conceptual model of a practice-oriented adaptive technology for reviewing the school mathematics course. *ScienceRise: Pedagogical Education*, (3 (64), 27–32. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2025.337529>
129. Boiko, Yu. (2025b). Features of the development and implementation of an adaptive test on the topic “inequalities”. *ScienceRise: Pedagogical Education*, (4 (65)), 4-9.
130. Ebbinghaus, H. (1885). *Memory: A Contribution to Experimental Psychology*.
131. Erikson, E. H. (1968). *Identity: Youth and crisis*. W. W. Norton & Company.
132. Hanushek, E. A., & Woessmann, L. (2015). *The knowledge capital of nations: Education and the economics of growth*. MIT Press.
133. Heaslip, G., Donovan, P., & Cullen, J. G. (2014). Student response systems and learner engagement in large classes. *Active Learning in Higher Education*, 15(1), 11–24. <https://doi.org/10.1177/1469787413514648>

134. Kasper, D. L., Fauci, A. S., Hauser, S. L., Longo, D. L., Jameson, J. L., & Loscalzo, J. (Eds.). (2018). *Harrison's principles of internal medicine* (20th ed.). McGraw-Hill Education.
<https://accessmedicine.mhmedical.com/book.aspx?bookID=2129>
135. Khaleel, F. L., Ashaari, N. S., & Wook, T. S. M. T. (2020). The impact of gamification on students learning engagement. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 10(5), 4965–4972. <https://doi.org/10.11591/ijece.v10i5.pp4965-4972>
136. Lazonder, A. W., & Harmsen, R. (2016). Meta-analysis of inquiry-based learning: Effects of guidance. *Review of Educational Research*, 86(3), 681-718. <https://doi.org/10.3102/0034654315627366>
137. Leong, K., Sung, A., Au, D., & Blanchard, C. (2021). A review of the trend of microlearning. *Journal of Work-Applied Management*, 13(1), 88-102. <https://doi.org/10.1108/JWAM-10-2020-0044>
138. Mayer: Mayer, R. E. (2014). Cognitive theory of multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (2nd ed., pp. 43–71). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139547369.005>
139. Mohammed, G. S., Wakil, K., & Nawroly, S. S. (2018). The effectiveness of microlearning to improve students 'learning ability. *International Journal of Educational Research Review*, 3(3), 32-38. <https://doi.org/10.24331/ijere.415824>
140. Oakley, B. (2014). *A mind for numbers: How to excel at math and science (even if you flunked algebra)*. TarcherPerigee.
141. Piaget, J. (1950). *The psychology of intelligence*. Routledge.
142. Reyes, J., Insorio, A. O., Ingreso, M. L. V., Hilario, F. F., & Gutierrez, C. R. (2019). Conception and Application of Contextualization in Mathematics Education. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, 6(1), 1-18. <https://izlik.org/JA68XH44XP>
143. Robinson, R., Molenda, M., & Rezabek, L. (2016). *Facilitating learning*. Association for Educational Communications and Technology.

<https://htirtayasa.files.wordpress.com/2010/09/facilitating-learning-rhonda-robinson-northern-illinois-university-michael-molenda-indiana-university.pdf>

144. Rohrer, D., Dedrick, R. F., & Stershic, S. (2015). Interleaved practice improves mathematics learning. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 900–908. <https://doi.org/10.1037/edu0000001>

145. Romero, C., & Ventura, S. (2020). Educational data mining and learning analytics: An updated survey. *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery*, 10(3), Article e1355. <https://doi.org/10.1002/widm.1355>

146. Russell, J. D. (1974). *Modular instruction: A guide to the design, selection, utilization and evaluation of modular materials*. Burgess Publishing.

147. Savery, J. R. (2006). Overview of problem-based learning: Definitions and distinctions. *Interdisciplinary Journal of Problem-Based Learning*, 1(1), 9-20. <https://doi.org/10.7771/1541-5015.1002>

148. Sigman, M. (2017) *The Secret Life of the Mind*. Hachette Book Group, Inc., New York.

149. Sousa, D. A. (2015). *How the Brain Learns Mathematics*. Corwin Press.

150. Steinberg, L. (2020). *Adolescence* (12th ed.). McGraw-Hill Education.

151. Sweller, J., van Merriënboer, J. J. G., & Paas, F. (2019). Cognitive architecture and instructional design: 20 years later. *Educational Psychology Review*, 31(2), 261–292. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09465-5>

152. Tykhonenko, Y., & Shkolnyi, O. (2025). Organization of repetition and systematization of the school mathematics course in a Ukrainian upper secondary profile school. *Фізико-математична освіта*, 40(4), 52-58. <https://doi.org/10.31110/fmo2025.v40i4-08>

153. Voitik, T., & Kopeykina, T. (2025). The importance of mathematical preparation for studying higher mathematics and physics in higher education institutions. *ScienceRise: Pedagogical Education*, (3), 14-18. <https://doi.org/10.15587/2519-4984.2025.335405>

154. Xu, P., & Zhang, M. (2025). A deep-learning-based dynamic multidimensional memory-augmented personalized recommendation research. *Applied Sciences*, 15, Article 9597. <https://doi.org/10.3390/app15179597>
155. Zaidi, A., Caines, A., Moore, R., Buttery, P., & Rice, A. (2020). *Adaptive forgetting curves for spaced repetition language learning* (Preprint arXiv:2004.11327). arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2004.11327>

ДОДАТКИ

Додаток А

Довідки про впровадження результатів



КОМУНАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ПОЛТАВСЬКИЙ МІСЬКИЙ БАГАТОПРОФІЛЬНИЙ ЛІЦЕЙ №1
ІМ. І.П. КОТЛЯРЕВСЬКОГО
ПОЛТАВСЬКОЇ МІСЬКОЇ РАДИ ПОЛТАВСЬКОЇ ОБЛАСТІ»
вул. Шевченка, 14, м. Полтава, 36011, тел. (0532) 608554, (0532) 562632
e-mail: licev1@gmail.com, web: <http://www.licev1.pl.ua/>, Код ЄДРПОУ 22546780
(КЗ ПМБ ліцей №1 ім. І.П. Котляревського)

03.09.2026 № 01-27/204

на № _____ від _____

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження

Бойко Юлії Володимирівни

«Використання сучасних технологій навчання для повторення та
систематизації курсу математики старшої школи»

Результати дисертаційного дослідження Ю. В. Бойко «Використання сучасних технологій навчання для повторення та систематизації курсу математики старшої школи» впроваджуються у Комунальному закладі "Полтавський міський багатoproфільний ліцей № 1 ім. І. П. Котляревського Полтавської міської ради Полтавської області" з 2022 року.

Учителями ліцею під час підготовки до уроків та їх проведення використовуються методичні розробки та статті з методичними рекомендаціями у фахових науково-педагогічних виданнях, авторкою яких є Ю. В. Бойко.

Починаючи з 2022 року, Ю. В. Бойко є вчителем математики у старших класах Комунального закладу "Полтавський міський багатoproфільний ліцей № 1 ім. І. П. Котляревського Полтавської міської ради Полтавської області". За цей час нею розроблено тренувальні та комплексні тести з математики, які проводилися для випускних класів на етапі підсумкового повторення у період з 2023 по 2026 роки. Також нею активно впроваджуються в освітній процес сучасні технології навчання, зокрема адаптивні тестування. Юлією Бойко розроблено та проведено методичний майстер-клас «Від ідеї до результату: проведення ефективних пробних тестів з математики у форматі НМТ» для вчителів математики Полтавської області. Учителі математики вищої, першої та другої категорій, що були слухачами даного семінару, відзначили практичну цінність та дієвість запропонованих методів.

Учні старших класів КЗ ПМБ ліцей № 1 ім. І. П. Котляревського на уроках математики (алгебри та початків аналізу, геометрії) у 10-11 класах виражають зацікавленість у вивченні предмету, вважають використання сучасних засобів навчання, зокрема адаптивних технологій, корисними під час уроків та в процесі самостійної підготовки, а також відмічають, що персоналізована траєкторія повторення та систематизації шкільного курсу математики сприяє мотивації до навчання та відчуттю ефективності докладених зусиль.

Директор



Полтавська міська рада
КОМУНАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
ПОЛТАВСЬКИЙ МІСЬКИЙ
БАГАТОПРОФІЛЬНИЙ
ЛІЦЕЙ №1
ІМ. І. П. КОТЛЯРЕВСЬКОГО
ПОЛТАВСЬКОЇ
МІСЬКОЇ РАДИ
ПОЛТАВСЬКОЇ
ОБЛАСТІ
ІДЕНТИФІКАЦІЙНИЙ КОД 22566780

Світлана КАРАПИШ

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційного дослідження

Бойко Юлії Володимирівни

«Використання сучасних технологій навчання для повторення та систематизації курсу математики старшої школи»

Результати дисертаційного дослідження Ю.В. Бойко «Використання сучасних технологій навчання для повторення та систематизації курсу математики старшої школи» впроваджуються в Науковому ліцеї № 3 Полтавської міської ради з 2023 року. Учителі математики ліцею під час підготовки до уроків та їх проведення використовують методичні розробки та статті з методичними рекомендаціями у фахових науково-педагогічних виданнях, авторкою яких є Ю.В. Бойко.

Протягом 2023–2026 років у ліцеї для випускних класів на етапі підсумкового повторення та систематизації курсу математики проводилися тренувальні та комплексні тести, розроблені Бойко Ю. В. Також за її ініціативи було впроваджено в освітній процес елементи адаптивних технологій навчання.

Учні Наукового ліцею №3 зазначали, що застосування пропонованих адаптивних технологій на уроках математики підвищувало зацікавленість та мотивацію до вивчення предмета, а виконання комплексних тестів під час підсумкового повторення сприяло ефективному самооцінюванню.

Директор



Ірина ГРИНЬ

Додаток Б

Структурно-логічні схеми до розділу «Рівняння»

РІВНЯННЯ

Лінійні

Квадратні

Дробові

Ірраціональні

Тригонометричні

Показникові

Логарифмічні

Системи рівнянь

Лінійні рівняння

Загальна схема Рівняння з модулем Добуток = 0

Добуток дорівнює нулю

Цей принцип використовується, коли рівняння можна розкласти на множники.

$$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ АБО } B = 0$$

Пояснення

Добуток двох (або більше) множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю.

Приклад:

$$\text{Рівняння: } (x - 2)(x + 3) = 0$$

$$x - 2 = 0 \text{ АБО } x + 3 = 0$$

$$x = 2 \quad x = -3$$

Коренями рівняння є 2 та -3.

Лінійні рівняння

Загальна схема Рівняння з модулем Добуток = 0

Рівняння з модулем

Найпростіше рівняння з модулем має вигляд $|f(x)| = a$, де a - число.

Випадок 1: $a < 0$

$$|f(x)| = (\text{від'ємне число}) \Rightarrow \text{Коренів немає } (\emptyset).$$

Модуль не може дорівнювати від'ємному числу.

Випадок 2: $a = 0$

$$|f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Рівняння з модулем зводиться до одного звичайного рівняння.

Випадок 3: $a > 0$

$$|f(x)| = a \Rightarrow f(x) = a \text{ АБО } f(x) = -a$$

Рівняння з модулем "розпадається" на два окремі рівняння.

Квадратні рівняння

Неповні Дискримінант Теорема Вієта Розклад на множники

Неповні квадратні рівняння

Це рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю.

Випадок 1: $b = 0, c = 0$

$$\begin{cases} ax^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

Випадок 2: $c = 0, b \neq 0$

$$\begin{cases} ax^2 + bx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(ax + b) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ АБО } ax + b = 0 \end{cases}$$

Корені $x_1 = 0, x_2 = -b/a$

Випадок 3: $b = 0, c \neq 0$

$$\begin{cases} ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -c/a \end{cases}$$

Якщо $-c/a < 0 \Rightarrow$ Коренів немає ($\emptyset$).

Якщо $-c/a > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$

Квадратні рівняння

Неповні Дискримінант Теорема Вієта Розклад на множники

Повні рівняння (через Дискримінант)

Для повного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ (де $a, b, c \neq 0$).

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \end{cases}$$

Випадок 1: $D < 0$

Рівняння не має дійсних коренів ($\emptyset$).

Випадок 2: $D = 0$

$$\begin{cases} x = -b / (2a) \end{cases}$$

Рівняння має один корінь.

Випадок 3: $D > 0$

$$\begin{cases} x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{D}) / (2a) \end{cases}$$

Рівняння має два різні корені

Квадратні рівняння

Неповні Дискримінант Теорема Вієта Розклад на множники

Теорема Вієта

Застосовується для звведених квадратних рівнянь (де $a = 1$):

$$\begin{cases} x^2 + px + q = 0 \end{cases}$$

Якщо x_1 та x_2 - корені цього рівняння, то:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

Лайфхак для повного рівняння: $ax^2 + bx + c = 0$

Якщо сума коефіцієнтів дорівнює нулю:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -c/a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -c/a \end{cases}$$

Квадратні рівняння

Неповні Дискримінант Теорема Вієта Розклад на множники

Розклад квадратного тричлена на множники

Якщо x_1 та x_2 є коренями квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то його можна розкласти на множники:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \end{cases}$$

Приклад

Для $2x^2 - 5x + 3 = 0$, корені $x_1 = 1, x_2 = 1.5$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 = 2(x - 1)(x - 1.5) \end{cases}$$

Дробово-раціональні рівняння

Основне правило

Метод пропорції

Основне правило розв'язання

Рівняння виду $f(x) / g(x) = 0$ рівносильне системі, де чисельник дорівнює нулю, а знаменник - не дорівнює.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

Алгоритм

1. Прирівняти чисельник до нуля і знайти корені.
2. Прирівняти знаменник до нуля і знайти "заборонені" значення (ОДЗ).
3. Виключити "заборонені" значення з коренів чисельника.

Основне правило

Метод пропорції

Метод пропорції (Навхрест)

Рівняння виду $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ можна розв'язати за властивістю пропорції, пам'ятаючи про ОДЗ.

$$b \cdot f(x) = a \cdot g(x)$$

Важливо!

Після знаходження коренів обов'язково треба перевірити, чи не перетворюють вони знаменники $g(x)$ (або b , якщо це вираз) на нуль.

ОДЗ: $g(x) \neq 0$

Ірраціональні рівняння

Корінь = Число

Корінь = Вираз

Корінь = Корінь

Два корені

Метод заміни

Тип 1: Корінь = Число

$$\sqrt[n]{f(x)} = a$$

Непарний степінь ($n = 3, 5, \dots$)

$$f(x) = a^n$$

Правило

Просто підносимо обидві частини до степеня n . Жодних обмежень (ОДЗ) не потрібно, оскільки a може бути будь-яким числом.

Випадок 1: $a < 0$ (напр. $\sqrt{x} = -2$)

$$\text{Коренів немає } (\emptyset)$$

Арифметичний корінь парного степеня завжди невід'ємний.

Випадок 2: $a \geq 0$ (напр. $\sqrt{x} = 3$)

$$f(x) = a^n$$

Підносимо обидві частини до степеня n . Умова $f(x) \geq 0$ виконується автоматично, оскільки $a \geq 0$.

Ірраціональні рівняння

Корінь = Число

Корінь = Вираз

Корінь = Корінь

Два корені

Метод заміни

Тип 2: Корінь = Вираз

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

Непарний степінь ($n = 3, 5, \dots$)

$$f(x) = (g(x))^n$$

Підносимо обидві частини до степеня n . Жодних ОДЗ не потрібно.

Парний степінь ($n = 2, 4, \dots$)

Це найважливіший випадок. Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^n, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Рівносильний перехід

Ми вимагаємо, щоб $g(x) \geq 0$ (оскільки корінь не може бути від'ємним). Умова $f(x) \geq 0$ (ОДЗ підкореневого виразу) виконується автоматично, бо $f(x)$ дорівнює парному степеню $(g(x))^n$. Тому її можна не писати.

Ірраціональні рівняння

Корінь = Число

Корінь = Вираз

Корінь = Корінь

Два корені

Метод заміни

Тип 3: Корінь = Корінь

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$$

Непарний степінь ($n = 3, 5, \dots$)

$$f(x) = g(x)$$

Підносимо до степеня n . Жодних ОДЗ.

Парний степінь ($n = 2, 4, \dots$)

Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0 \quad (\text{або } g(x) \geq 0) \end{cases}$$

Оскільки $f(x) = g(x)$, достатньо вимагати невід'ємність лише одного з виразів (зазвичай обирають простіший).

Ірраціональні рівняння

Корінь = Число

Корінь = Вираз

Корінь = Корінь

Два корені

Метод заміни

Тип 4: Сума або різниця коренів

$$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = a$$

Алгоритм

1. Знайти ОДЗ: $\{ f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \}$.
2. Піднести обидві частини до квадрату (за формулою $(a \pm b)^2$).
3. Звести подібні доданки і відокремити корінь, що залишився.
4. Ще раз піднести обидві частини до квадрату.
5. Розв'язати отримане рівняння.
6. **ОБОВ'ЯЗКОВО:** Перевірити корені на відповідність ОДЗ (з кроку 1) або виконати перевірку підстановкою у початкове рівняння.

Піднесення до квадрату не завжди є рівносильним переходом, тому перевірка коренів є критично важливою.

Тригонометричні рівняння

Загальні формули

Особливі випадки

Обернені функції

Розв'язки найпростіших рівнянь

Тут a - число, k - будь-яке ціле число ($k \in \mathbb{Z}$).

Синус

$$\sin(x) = a \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin(a) + \pi k$$

Умова: $|a| \leq 1$

Косинус

$$\cos(x) = a \Rightarrow x = \pm \arccos(a) + 2\pi k$$

Умова: $|a| \leq 1$

Тангенс

$$\operatorname{tg}(x) = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg}(a) + \pi k$$

Умова: a - будь-яке число

Котангенс

$$\operatorname{ctg}(x) = a \Rightarrow x = \operatorname{arccctg}(a) + \pi k$$

Умова: a - будь-яке число

Показникові рівняння

Важливо! (Множина значень)

Показникова функція $y = a^x$ (де $a > 0$, $a \neq 1$) завжди набуває лише додатних значень.

$$\left(a^{f(x)} > 0 \text{ (завжди)} \right)$$

Тому, якщо ви маєте рівняння $a^{f(x)} = b$, де $b \leq 0$, то таке рівняння коренів не має ($\emptyset$).

Приклад: $5^x = -5 \Rightarrow \emptyset$.

$$\left(\sin(x) = 0 \Rightarrow x = \pi k \right)$$

$$\left(\sin(x) = 1 \Rightarrow x = \pi/2 + 2\pi k \right)$$

$$\left(\sin(x) = -1 \Rightarrow x = -\pi/2 + 2\pi k \right)$$

Косинус

$$\left(\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k \right)$$

$$\left(\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 2\pi k \right)$$

$$\left(\cos(x) = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k \right)$$

Спільна основа

Винесення за дужки

Заміна

Однорідні

Логарифмування

Тип 1: Зведення до спільної основи

Це найпростіший тип, де обидві частини рівняння можна подати у вигляді степеня з однаковою основою.

$$\left(a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \right)$$

Умова: $a > 0$, $a \neq 1$.

Тип 2: Винесення спільного множника

Використовується, коли доданки мають однакову основу, але різні лінійні показники (напр. x , $x+1$, $x-2$).

Використовуємо властивість: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Тип 3: Метод заміни змінної

Часто зводиться до квадратного рівняння. Шукайте степені, показники яких відрізняються вдвічі (напр. x та $2x$).

Тип 4: Однорідні рівняння

Мають вигляд: $A \cdot a^{2f(x)} + B \cdot (a \cdot b)^{f(x)} + C \cdot b^{2f(x)} = 0$.

Метод: Ділимо все рівняння на $b^{2f(x)}$ (або $a^{2f(x)}$) і зводимо до заміни.

Тип 5: Метод логарифмування

Використовується, коли основи різні і їх неможливо звести до спільної (напр. $2^x = 3^{x+1}$).

Логарифмічні рівняння

Важливо! (ОДЗ Логарифма)

Завжди, перш ніж розв'язувати, потрібно пам'ятати про Область Допустимих Значень (ОДЗ) для виразу $\log_a b$:

1. Підлогарифмічний вираз > 0 ($b > 0$)
2. Основа > 0 ($a > 0$)
3. Основа $\neq 1$ ($a \neq 1$)

Усі знайдені корені **ОБОВ'ЯЗКОВО** перевіряються на відповідність ОДЗ.

Тип 1: За означенням (Логарифм = Вираз)

Рівняння виду $\log_a f(x) = g(x)$ (де $g(x)$ може бути числом або виразом).

$$\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$$

Рівносильний перехід

Цей перехід є рівносильним (ОДЗ $f(x) > 0$ виконується автоматично, оскільки $a^{g(x)} > 0$).
Перевірка ОДЗ потрібна лише якщо основа a містить змінну.

Тип 2: Логарифм = Логарифм

Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Таке рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{АБО} \quad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Пояснення

Ми прирівнюємо підлогарифмічні вирази. Оскільки $f(x) = g(x)$, достатньо вимагати, щоб лише один з них був > 0 (зазвичай обирають простіший).

Тип 3: Застосування властивостей логарифмів

Використовується, коли є сума/різниця логарифмів з однаковою основою.

$$\log_a f + \log_a g = \log_a (f \cdot g)$$

$$\log_a f - \log_a g = \log_a (f / g)$$

Алгоритм

1. **Знайти ОДЗ.** Це критично важливо, оскільки застосування властивостей змінює ОДЗ. Потрібно, щоб усі початкові підлогарифмічні вирази були > 0 .
2. "Згорнути" логарифми за властивостями в один.
3. Розв'язати отримане рівняння (типу 1 або 2).
4. **Перевірити** корені на відповідність ОДЗ з кроку 1.

Тип 4: Метод заміни змінної

Використовується, коли рівняння містить однаковий логарифмічний вираз та його степені (напр. $\log^2 x$).

Системи рівнянь

Основні методи розв'язання

Метод підстановки

Метод додавання

Метод підстановки

Алгоритм

1. Виразити одну змінну через іншу з одного рівняння.
2. Підставити цей вираз в інше рівняння системи.
3. Розв'язати отримане рівняння з однією змінною.
4. Знайти значення другої змінної, повернувшись до виразу з кроку 1.
5. Записати відповідь у вигляді пари чисел (x, y) .

Системи рівнянь

Основні методи розв'язання

Метод підстановки

Метод додавання

Метод додавання (або віднімання)

Алгоритм

1. Дібрати множники для одного або обох рівнянь так, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами.
2. Додати рівняння (ліві частини до лівих, праві до правих).
3. Розв'язати отримане рівняння з однією змінною.
4. Підставити знайдене значення у будь-яке з початкових рівнянь, щоб знайти іншу змінну.
5. Записати відповідь.

Додаток В

Приклад завдання на застосування графічного способу рівнянь

Приклад завдання, у якому використовуються готові рисунки і яке не потребує розпізнавання або побудови графіків конкретних функцій.

Приклад 1. На рисунку В.1 зображено графік рівняння кола $x^2 + y^2 = 9$.

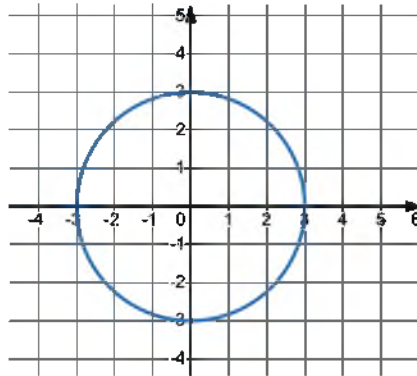
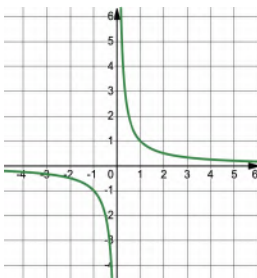


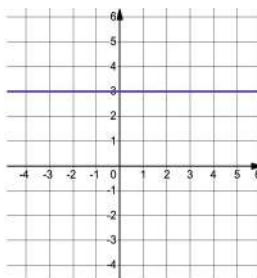
Рис. В.1

На якому із рисунків (А-Д) зображено графік функції $y = f(x)$, якщо відомо, що система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = f(x); \end{cases}$ має рівно два розв'язки?

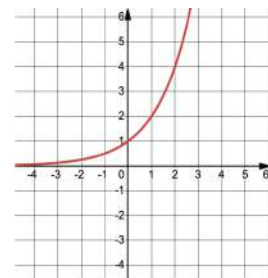
А



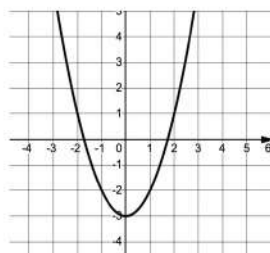
Б



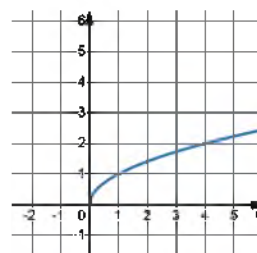
В



Г



Д



Ключ: В

Приклад завдання на застосування графічного способу, яке потребує розпізнавання або побудови графіків елементарних функцій.

Приклад 2. На рисунку В.2 зображено графік функції $y = a^x$, визначеної на множині дійсних чисел. Установіть відповідність між рівнянням (1-3) та кількістю його розв'язків (А-Д).

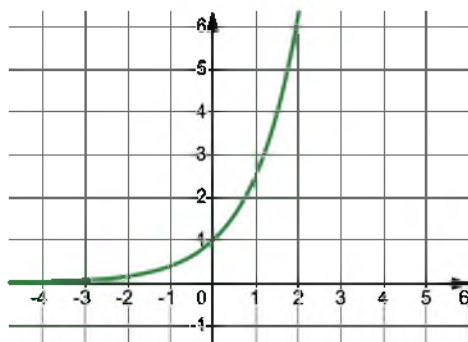


Рис. В.2

Рівняння (1-3)

1. $a^x = \sqrt{x}$
2. $a^x = \log_{0,5} x$
3. $a^x = 2 - x^2$

Кількість розв'язків (А-Д)

- А. Жодного
- Б. Один
- В. Два
- Г. Три
- Д. Більше трьох

Ключ: 1-А, 2-Б, 3-В.

Додаток Г

Структурні особливості розробки та кодування завдань, а також логіки генерування тестів до розділів С і D змістового тематичного класифікатора завдань

1. На початку повторення та систематизації кожного з розділів С і D, перед опрацюванням окремих його тем, учням пропонується виконання діагностичного тесту за усіма темами розділу задля попереднього визначення діагностичного рівня навчальних досягнень (не опановано або володіє темою на початковому, середньому, достатньому або високому рівні). Завдання для такого тесту генеруються автоматично за таким алгоритмом: спершу пропонуються завдання з альтернативами або на встановлення відповідності середнього рівня складності до кожної теми (від 4 до 8 завдань для рівнянь), потім завдання з альтернативами або на встановлення відповідності початкового або достатнього рівня до кожної теми залежно від того, хибною чи правильною була відповідь на завдання середнього рівня з цієї теми (від 2 до 4 завдань). Якщо з певної теми були правильні відповіді на завдання середнього і достатнього рівня, то пропонується завдання високого рівня відкритої форми. Якщо для деякої теми була правильна відповідь на завдання середнього рівня і неправильна на завдання достатнього, то у завданнях відкритої форми на цю тему буде запропоновано достатній рівень. Якщо завдання певної теми на якомусь рівні в тесті пропонувалися декілька разів і давали різний результат, то цю тему буде зараховано до нижчого із результатів. Кількість завдань відкритої форми, зазвичай, також коливається від 2 до 4.

2. Деякі завдання, особливо достатнього та високого рівня, є комбінованими та можуть стосуватися одразу кількох тем. Такі завдання певного рівня можуть бути запропоновані лише якщо для усіх типів рівнянь, яких стосується це завдання, було досягнуто попереднього рівня. Наприклад, дробове рівняння з параметром (високого рівня), чисельник якого – показниковий вираз, а знаменник – ірраціональний, буде запропоновано, якщо і для дробових раціональних, і ірраціональних, і показникових рівнянь було правильно розв'язано завдання достатнього рівня. До кодування таких комбінованих завдань відкритої форми застосовано принцип, описаний у пункті 1.5

для завдань на відповідність, а саме, що замість номеру теми в такому випадку ставиться «0». Проте таке завдання відкритої форми програмно пов'язано з усіма темами, знання з яких застосовуються до його розв'язування.

3. Під час розробки і/або підбору завдань з альтернативами або на встановлення відповідності обов'язково фіксуємо логіку одержання варіантів відповідей задля можливості «клонування» таких завдань із іншими числовими чи буквеними даними за допомогою засобів штучного інтелекту й одержання при цьому робочих і рівнозначних до першоджерела дистракторів. Визначаючи складність завдань будемо опиратися на психометричні характеристики сертифікаційних робіт ЗНО (НМТ) за останні роки, зокрема визначену складність пропонованих тестових завдань, що стосуються відповідного розділу.

Додаток Д

Приклади завдань розділу «Рівняння» реалізовані під час діагностичного тесту, структура і порядок якого наведено у таблиці 2.4 розділу 2

Завдання 1. Установіть відповідність між рівняннями (1-3) та розв'язками (А-Д).

Рівняння (1-3)	Розв'язок рівняння (А-Д)
1. $2x - 1 = 5;$	А. 2
2. $x^2 - 5x - 6 = 0;$	Б. 3
3. $\frac{x-2}{x-3} = 0.$	В. 4
	Г. $-1; 6$
	Д. $2; 3$

Ключ: 1-Б, 2-Г, 3-А.

Розв'язання. Перше рівняння є лінійним, тож залишимо змінні в лівій частині, а числа перенесемо в праву та знайдемо невідомий множник: $2x = 6 \Rightarrow x = 3$. Відповідь: Б.

Друге рівняння є квадратним, тож його можемо розв'язати за допомогою дискримінанта або теореми Вієта. Першим способом одержуємо:

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4(-6) = 49;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow x_1 = 6; x_2 = -1.$$

За теоремою Вієта одержуємо $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 \cdot x_2 = -6; \end{cases} \Rightarrow x_1 = 6; x_2 = -1$. Відповідь: Г.

Третє рівняння є дробовим раціональним, тож для його розв'язку прирівняємо чисельник до нуля, враховуючи що знаменник не дорівнює нулю. Таким чином $x = 2$. Відповідь: А.

Коментар. Типовими помилками під час розв'язання лінійних рівнянь є перенесення виразів з однієї частини в іншу без зміни знаку та виконання дії додавання або віднімання замість ділення при знаходженні невідомого множника. Результати таких помилок для першого рівняння відображено у дистракторах Б та В відповідно.

Під час розв'язування квадратного рівняння, за нашими спостереженнями, учні допускають розрахункові помилки, зокрема в обчисленні дискримінанта, особливо за

від'ємного значення вільного члена рівняння. Такому випадку буде одержано значення дискримінанта $D = 1$ і розв'язки, відповідно, $x_1 = 2$; $x_2 = 3$, що враховано у дистракторі Д.

У розв'язуванні найпростіших дробових раціональних рівнянь учні, керуючись правилом, що чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, можуть плутати частини дробу і одержати відповідь $x = 3$, що відповідає дистрактору Б. Також інколи в таких рівняннях учні діють за принципом як у рівняннях типу «добуток дорівнює нулю» і прирівнюють до нуля обидві частини дробу, що в результаті приведе до хибної відповіді Д.

Завдання 2. Установіть відповідність між рівняннями (1-3) та їхніми розв'язками (А-Д).

Рівняння (1-3)

1. $\sqrt{x-3} = -1$;

2. $2^{x+3} = 16$;

3. $\log_2(x-4) = 0$.

Розв'язок рівняння (А-Д)

А. коренів немає

Б. 4

В. 1

Г. 5

Д. 7

Ключ: 1-Б, 2-В, 3-Г.

Розв'язання. У першому рівнянні достатньо зауважити, що корінь парного степеня дорівнює від'ємному числу, отже таке рівняння коренів немає. Відповідь: А.

Друге рівняння є показниковим, а тому зведемо до однакової основи та прирівняємо показники: $2^{x+3} = 2^4 \Rightarrow x + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$. Відповідь: В.

У третьому рівнянні за означенням логарифма $x - 4 = 2^0$, звідки, враховуючи, що $2^0 = 1$, одержуємо $x = 5$. Відповідь: Г.

Коментар. Типовою помилкою у першому рівнянні буде не врахувати, що корінь парного степеня набуває невід'ємних значень і піднести обидві частини рівняння до квадрату, в результаті чого буде одержано відповідь $x = 4$, чому відповідає дистрактор Б.

У другому рівнянні помилковим буде розв'язувати його як лінійне $2(x+3) = 16$, у результаті чого одержимо $x = 5$, що відображено в дистракторі Д. За правильного визначення типу рівняння учень також може не завершити його розв'язок і записати у відповідь показник правої частини, отримавши результат Б. Не виключена також помилка з

неправильним перенесенням числа у праву частину в лінійному рівнянні після прирівнювання показників, що відображено в дистракторі Д.

У третьому рівнянні, провівши аналогію з показниковими рівняннями або переплутавши область визначення та множену значень логарифмічної функції, учень може помилково вирішити, що рівняння, де логарифм дорівнює нулю, не має коренів і дати відповідь А. Також згадавши, що нулю дорівнює логарифм одиниці і не врахувавши підлогарифмічний вираз у конкретному випадку, можливий хибний висновок, що $x = 1$, тобто відповідь В. Ще одна помилка може бути пов'язана з неправильним застосуванням властивості степеня, зокрема, записавши два в нульовому степені як нуль, а не одиницю, буде одержано відповідь Б.

Завдання 3. Скільки коренів має рівняння $\sin(x) = \frac{1}{3}$ на проміжку $[0; \pi]$?

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	більше трьох

Ключ: В

Розв'язання. Дане рівняння вважаємо найбільш доцільним розв'язувати графічно за допомогою одиничного кола або графіка функцій $y = \sin x$ та $y = \frac{1}{3}$ на проміжку $[0; \pi]$. Наприклад, по графіку (див. рис. 2.3) бачимо дві точки перетину графіків, а отже рівняння має корені. Відповідь: В

Коментар. Варіанти відповіді, наведені до цього завдання в цілому є універсальними для завдань на встановлення кількості розв'язків, проте передбачаємо такі основні причини помилок: 1) не враховано проміжок $[0; \pi]$ і визначено кількість розв'язків для даного рівняння на множині всіх дійсних чисел, тобто що рівняння має безліч коренів, чому відповідає дистрактор Д; 2) за рахунок того, що $\frac{1}{3}$ не є табличним значенням синуса, зроблено висновок про відсутність розв'язків, тобто відповідь А; 3) у графічному способі розв'язання побудовано графік косинуса, а отже одержано один розв'язок на заданому проміжку, що зазначено у дистракторі Б.

Завдання 4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 3y = 10, \\ 2x + y = 16; \end{cases}$ Для одержаного розв'язку

$(x_0; y_0)$ запишіть x_0 .

А	Б	В	Г	Д
---	---	---	---	---

6,5	-3	9,5	0,5	3
-----	----	-----	-----	---

Ключ: В

Розв'язання. Дану систему рівнянь можна розв'язати методом підстановки, виразивши з другого рівняння y через змінну x , проте вбачаємо доцільнішим відняти від першого рівняння друге, в результаті чого одержимо $2y = -6$, звідки $y = -3$. Підставивши одержаний результат замість ігрика, наприклад, y в друге рівняння та розв'язавши одержане лінійне рівняння відносно змінної x , одержимо $x = 9,5$. Оскільки пара чисел $(9,5; -3)$ є розв'язком даної системи, то у відповідь запишемо 9,5. Відповідь: В

Коментар. У розв'язуванні системи рівнянь однією із перепон до правильного результату може бути плутанина між компонентами розв'язку, зокрема якщо учень розрахує правильно значення змінної ігрик, проте не виконає підстановку для розрахунку ікса, таким чином обравши дистрактор Б. Відмітимо, що при відніманні рівнянь інколи виникає помилка зі знаками з тієї причини, що учень не віднімає чітко від першого рівняння друге, а записує абсолютне значення різниці між відповідними частинами рівнянь. У такому випадку буде одержано результат $2y = 6 \Rightarrow y = 3$, що враховано у дистракторі Д. Якщо за такої помилки учень продовжить обчислення, підставивши ігри y в перше рівняння, то одержить значення $x_0 = 0,5$, тобто відповідь Г. За підстановки хибно знайденого ігрика в друге рівняння одержимо $x_0 = 6,5$, тобто відповідь А. Цей же дистрактор може бути одержано у ході розв'язання системи методом підстановки за неправильного вираження змінної, наприклад, з другого рівняння записати $y = 16 + 2x$.

Завдання 5. Установіть відповідність між рівняннями (1-3) та числами, що є їхніми розв'язками (А-Д).

Рівняння (1-3)

1. $\sin \frac{\pi}{x} = 1$;

2. $\sqrt{x} = 4$;

3. $\frac{\pi}{x-4} = 0$;

Розв'язок рівняння (А-Д)

А. 2

Б. 4

В. $\frac{\pi}{2}$

Г. π

Д. коренів немає

Ключ: 1-А, 2-В, 3-Д.

Розв'язання. Для розв'язку першого рівняння достатньо скористатися табличкою значень синусів, косинусів і тангенсів (наприклад, тією, що запропонована у довідкових матеріалах до сертифікаційної роботи ЗНО (НМТ) або одиничним колом. Оскільки одиниці дорівнює синус кута $\frac{\pi}{2}$, то з рівності $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2}$ одержуємо, що $x = 2$. Такий варіант є серед запропонованих, отже можемо дати відповідь, не розглядаючи інші розв'язки цього рівняння за допомогою періоду функції синуса. Відповідь: А.

У другому рівнянні, оскільки корінь парного степеня дорівнює додатному числу, достатньо обидві частини піднести до квадрату, звідки одержимо $x = 16$. Відповідь: В.

У третьому рівнянні, оскільки $\pi \neq 0$, то рівняння коренів немає. Відповідь: Д

Коментар. Перше рівняння учні помилково можуть розв'язувати як лінійне $\frac{\pi}{x} = 1$, ігноруючи наявність функції синуса, що свідчить про абсолютне не розуміння поняття тригонометричного рівняння. Також для цього рівняння імовірний такий варіант, що учень скористається табличкою або одиничним колом, але не врахує, що це значення аргументу і запише $\frac{\pi}{2}$ як кінцеву відповідь. Результати таких типових помилок до першого рівняння відображено у дистракторах Г і В, відповідно.

Типовою помилкою у другому рівнянні є добування кореня квадратного з правої частини рівняння замість того, аби обидві частини піднести до квадрату. У такому випадку буде одержано результат із варіанту А.

Для розв'язування дробового раціонального рівняння учню необхідно пам'ятати, що дріб дорівнює нулю, якщо його чисельник дорівнює нулю і враховувати область допустимих значень дробово-раціонального виразу. Якщо учень це пам'ятає, то з рівносильної системи $\begin{cases} \pi = 0, \\ x - 4 \neq 0; \end{cases}$ отримає, що рівняння коренів немає. Проте, якщо такі міркування учень не застосує або не доведе до кінця (що в даному випадку імовірно, оскільки попереднє завдання на розв'язання такого типу рівняння було виконано хибно), то може припустити з запису рівняння розв'язки $x = \pi$ або $x = 4$ (дистрактори Г і Б, відповідно). Достатньо зробити перевірку підстановкою, аби зрозуміти, що жодне з них не перетворює рівняння у правильну рівність.

Завдання 6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x} = 9, \\ y - x = 7; \end{cases}$. Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ запишіть y_0 .

А	Б	В	Г	Д
4	10	16	-74	88

Ключ: Д

Розв'язання. З першого рівняння системи, піднісши ліву і праву частину до квадрату, одержимо $x = 81$. Підставивши знайдене значенні ікса в друге рівняння, розв'яжемо лінійне рівняння відносно змінної ігрик та отримаємо $y = 88$. Оскільки пара чисел (81; 88) є розв'язком даної системи рівнянь, то маємо відповідь Д.

Коментар. Дану систему рівнянь, хоч вона і містить ірраціональне рівняння, попередньо відносимо до початкового рівня, оскільки одну зі змінних ми безпосередньо обчислюємо з першого рівняння і навіть не застосовуємо ні метод підстановки, ні метод додавання. Серед можливих помилок: правильно знайдено ікс, проте допущено помилку при розв'язанні лінійного рівняння (дистрактор Г); помилково знайдено ікс за рахунок обчислення кореня квадратного з правої частини замість піднесення до квадрату (дистрактор Б, якщо при цьому правильно розв'язано далі лінійне рівняння, або дистрактор А, якщо з помилкою розв'язано і лінійне рівняння). Також може бути ситуація, коли учень, можливо через поспіх або не уважність, не зауважує, що вирази зі змінною ікс в обох рівняннях різні, і підставляє замість ікса у друге рівняння одразу 9. У такому випадку буде одержано результат В.

Завдання 7. Установіть відповідність між рівняннями (1-3) та кількістю їхніх розв'язків (А-Д).

Рівняння (1-3)

1. $(|x| - 5)(x + 7) = 0;$
2. $2^{2x} + 7 \cdot 2^x + 6 = 0;$
3. $(x - 1) \cdot \log_2(x - 3) = 0;$

Кількість розв'язків (А-Д)

- А. Жодного
- Б. Один
- В. Два
- Г. Три
- Д. Більше трьох

Ключ: 1-Г, 2-А, 3-Б.

Розв'язання. У першому рівнянні добуток дорівнює нулю, а отже кожен множник прирівнюємо до нуля. Рівняння $|x| - 5 = 0$ зведемо до найпростішого рівняння з модулем $|x| = 5$, звідки одержимо $x = \pm 5$. З рівняння $x + 7 = 0$ одержимо $x = -7$. Загалом перше рівняння має три корені. Відповідь: Г

Друге рівняння є показниковим, яке зведемо до квадратного шляхом заміни $2^x = t$, де $t > 0$, тоді $t^2 + 7t + 6 = 0$ має корені $t_1 = -1, t_2 = -6$, що не задовольняє умову. Якщо не зазначимо при заміні, що $t > 0$, то при поверненні до заміни одержимо два показникові рівняння $2^x = -1$ та $2^x = -6$, які не мають розв'язків. Таким чином, друге рівняння коренів немає. Відповідь: А.

У третьому рівнянні також можемо застосувати властивість добутку, який дорівнює нулю, проте перш за все варто записати обмеження по області допустимих значень, оскільки маємо логарифмічний вираз в умові. ОДЗ: $x > 3$. З першої частини рівняння одержимо $x = 1$, що не належить ОДЗ, з рівняння $\log_2(x - 3) = 0$ одержимо $x - 3 = 2^0$, а отже $x = 1 + 3 = 4$. Тобто загалом рівняння має лише один розв'язок. Відповідь: Б.

Коментар. Дане завдання належить до достатнього рівня, а отже передбачається, що учень уміє самостійно застосовувати знання у стандартних ситуаціях та правильно застосовує відповідні навички. У першому рівнянні основною помилкою, з якою може зіткнутися учень, є врахування того, що рівняння з модулем у даному випадку має два розв'язки. Загубивши від'ємний корінь рівняння $|x| = 5$, загалом для даного рівняння буде одержано два розв'язки, що відображено у дистракторі В.

Для визначення кількості коренів другого рівняння учням, першочергово, потрібно пам'ятати про метод заміни змінної. Отримавши два розв'язки для нової змінної, потрібно не поспішати з відповіддю (дистрактор В) і не забути повернутися до заміни. Якщо для нової змінної було правильно знайдено корені, то при поверненні до заміни важливо пам'ятати про множину значень показникового виразу й зауважити, що такі рівняння коренів не мають. Нами помічено, що інколи учні плутають такі рівняння з біквадратними і міркують таким чином, що два корені має рівняння з новою змінною і тоді після повернення до заміни кожне з двох рівнянь типу $x^2 = t$ має теж по два корені, а загалом дане рівняння тоді має чотири розв'язки. Звісно, такі міркування без наведення конкретно розв'язку є хибними навіть для біквадратних, оскільки, знову ж таки, не враховують знак заміненних коренів, не кажучи про те, що дане рівняння є показниковим. Тому спостерігаючи відповідь Д до цього

рівняння вважаємо, що варто звернути увагу учнів і на розв'язання показникових рівнянь, зокрема методом заміни змінної, і біквadratних рівнянь теж.

Завдання 8. Один із коренів квадратного рівняння $x^2 + x + m = 0$ дорівнює 5. Знайдіть значення параметра m .

А	Б	В	Г	Д
30	-30	-6	-20	20

Ключ: Б

Розв'язання. Для розв'язання даного завдання необхідно застосувати теорему Вієта. Оскільки рівняння є зведеним, то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 \cdot x_2 = m; \end{cases}$. За умовою один із коренів дорівнює 5, тому, підставивши замість x_1 у перший рядок системи це значення, розв'яжемо одержане рівняння відносно змінної x_2 і отримаємо результат $x_2 = -6$. Знаючи таким чином значення обох коренів рівняння, знайдемо шукане значення параметра: $m = x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot (-6) = -30$. Відповідь: Б.

Коментар. Оскільки дане завдання відноситься до достатнього рівня, то передбачаємо, що учень володіє програмним матеріалом стосовно формулювання теореми Вієта для зведеного квадратного рівняння та її застосування в типових задачах. Відповідно, передбачаємо, що цим завданням ми перевіряємо не знання теореми, а саме вміння її правильно застосувати до розв'язування задач. Таким чином, основні помилки, які тут вбачаємо, пов'язані з правильністю визначення знаку суми та добутку коренів. Зокрема, за правильно визначеної суми коренів і помилки з визначенням добутку ($x_1 \cdot x_2 = -m$), одержимо результат 30, тобто дистрактор А. Якщо помилково визначено суму ($x_1 + x_2 = 1$), проте правильно записано добуток, то одержимо результат -20 , тобто дистрактор Г. З помилково записаними і добутком, і сумою, буде одержано результат з варіанту Д. Також врахуємо, що учень, знайшовши з суми коренів рівняння x_2 , може помилково записати цей результат у відповідь, не розуміючи повною мірою умову завдання щодо параметра. Таким чином, ми розуміємо, з одного боку, що учень має уявлення про теорему Вієта та її застосування, проте, з іншого боку, не може самостійно на даний момент розв'язати квадратне рівняння з параметром.

Завдання 9. За якого значення параметра a рівняння має рівно два різні корені: $(x^2 - (a + 1)x + 2a - 2)(x - a) = 0$? Якщо таких значень декілька, у відповідь запишіть їхню суму.

Ключ: 5

Розв'язання. Дане рівняння представлено добутком двох виразів, який дорівнює нулю, а отже, прирівнюємо до нуля кожен множник. Перший множником є квадратний тричлен, тому, прирівнявши його до нуля, отримуємо, відповідно, квадратне рівняння. Прирівнявши другий множник до нуля, одержуємо лінійне рівняння, яке точно має один корінь $x = a$. Отже, щоб виконувалася умова завдання, необхідно, аби квадратне рівняння мало або один корінь, або два корені, один із яких теж дорівнює a . Знайдемо дискримінант квадратного рівняння: $D = (a + 1)^2 - 4(2a - 2) = (a - 3)^2$.

1) Якщо $D = 0$, тобто $a = 3$ одержимо з квадратного рівняння $x = 2$, що не дорівнює кореню, одержаному з лінійного рівняння ($x = a = 3$), а отже виконується умова завдання.

2) Якщо $a \neq 3$ квадратне рівняння має два корені $x_1 = a - 1$; $x_2 = 2$. Оскільки $a - 1 \neq a$, то умова завдання буде виконуватися лише за умови, що $2 \neq a$.

Таким чином, дане рівняння має два різні корені, якщо $a = 3$ або $a = 2$. Отже, сума можливих значень параметра буде 5. Відповідь: 5.

Коментар. Дане завдання передбачає відкриту відповідь короткої форми, проте в процесі навчання ми б радили вчителям принаймні періодично перевіряти записи учнів до таких завдань, оскільки зберігається ризик отримати правильну відповідь попри хибні або частково хибні міркування. Щодо ходу розв'язання даного рівняння, то основна похибка у міркуваннях полягає у висновку, що квадратний тричлен обов'язково має лише один корінь, не враховуючи, що коренів може бути два, але один із них збігається з розв'язком лінійного рівняння.

Завдання 10. Укажіть суму цілих значень параметра a , при якому рівняння $25^x - (a + 1) \cdot 5^x + 3a - 6 = 0$ має єдиний розв'язок.

Ключ: 8

Розв'язання. Дане рівняння розв'яжемо шляхом заміни $5^x = t$, де $t > 0$. Для одержаного квадратного рівняння $t^2 - (a + 1)t + 3a - 6 = 0$ обчислимо дискримінант: $D = (a + 1)^2 - 4(3a - 6) = a^2 + 2a + 1 - 12a + 24 = a^2 - 10a + 25 = (a - 5)^2$.

Оскільки $D \geq 0$, то квадратне рівняння матиме або один корінь, або два корені. Дане показникове рівняння матиме один корінь, якщо квадратне рівняння має один додатний корінь або має два корені, але лише один із них додатний. Тож розглянемо два випадки для коренів квадратного рівняння залежно від значення параметра a :

1) Якщо $D = 0$, тобто $a = 5$, то $t = \frac{a+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Оскільки $t > 0$, то, повертаючись до заміни, одержимо рівняння $5^x = 3$, яке має єдиний корінь. Отже, значення параметра $a = 5$ задовольняє умову.

2) Якщо $D > 0$, тобто $a \neq 5$, то $t_1 = a - 2, t_2 = 3$. Як ми вже зауважили, щоб дане показникове рівняння мало один корінь, то лише одне зі значень t має бути додатним. Оскільки $t_2 = 3 > 0$, то для виконання умови $t_1 = a - 2 \leq 0$, тобто $a \leq 2$.

Таким чином, умова виконується при $a \leq 2$ або $a = 5$. Оскільки у відповідь потрібно записати суму цілих значень параметра a , то маємо $0 + 1 + 2 + 5 = 8$.
Відповідь: 8.

Коментар. Типовою помилкою у міркуваннях до цього завдання може бути, знову таки, висновок про те, що для того аби дане рівняння мало один розв'язок, має обов'язково бути один корінь у квадратного рівняння після заміни, тобто $D = 0$. Тому, аналізуючи дане завдання, варто наголосити, що нова змінна t повинна набувати лише додатних значень, оскільки дорівнює показниковому виразу. Відповідно, дане рівняння має єдиний корінь лише якщо квадратне рівняння після заміни має один додатний розв'язок, а це можливо і у випадку, якщо коренів два, але один із них не додатний. Не виключаємо також ризик помилки, характерний для рівнянь, які зводяться до квадратних, що полягає у виконанні завдання для нового рівняння, без повернення до заміни. Тому, аналізуючи завдання і, за можливості, записи до нього, варто звертати увагу на запис коренів рівняння після заміни, а саме змінної в цих записах.

Додаток Е

Структурно-логічні схеми до розділу «Нерівності»

Нерівності

Числові нерівності та їх властивості

Лінійні нерівності

Квадратичні нерівності

Раціональні нерівності

Показникові нерівності

Логарифмічні нерівності

Числові нерівності

Важливо! (Означення порівняння чисел)

Порівняння двох чисел базується на знаку їхньої різниці:

$$\left\{ \begin{array}{l} a > b \iff a - b > 0 \text{ (різниця додатна)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a < b \iff a - b < 0 \text{ (різниця від'ємна)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = b \iff a - b = 0 \text{ (різниця дорівнює нулю)} \end{array} \right.$$

Основні властивості

Множення на число

Дії з нерівностями

Степені

Транзитивність та додавання числа

До обох частин нерівності можна додавати або віднімати будь-яке число — знак нерівності **не змінюється**.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Якщо } a > b \text{ і } b > c \implies a > c \text{ (транзитивність)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a > b \implies a + c > b + c \end{array} \right.$$

Основні властивості

Множення на число

Дії з нерівностями

Степені

Множення та ділення на число

Знак нерівності залежить від знаку числа, на яке виконується дія:

1. Множення на додатне число ($c > 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} a > b \iff ac > bc \text{ (знак зберігається)} \end{array} \right.$$

2. Множення на від'ємне число ($c < 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} a > b \iff ac < bc \text{ (знак змінюється на протилежний)} \end{array} \right.$$

Почленні операції над нерівностями

Нерівності однакового знака можна почленно додавати, а для додатних чисел — множити:

Почленне додавання (для будь-яких чисел):

$$\left\{ \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right. \Rightarrow a + c > b + d$$

Почленне множення (тільки для додатних чисел $a, b, c, d > 0$):

$$\left\{ \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right. \Rightarrow ac > bd$$

Степені та обернені величини

Властивості для додатних чисел ($a > 0, b > 0$):

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n \quad (\text{де } n \in \mathbb{N})$$

$$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad (\text{знак змінюється})$$

Лінійні нерівності

Головне правило ділення на від'ємне число!

Нерівність виду $ax > b$ (або $<, \geq, \leq$) є лінійною. При діленні обох частин на від'ємне число знак нерівності обов'язково розвертається:

$$-3x \leq 12 \Rightarrow x \geq \frac{12}{-3} \Rightarrow x \geq -4 \quad (\text{знак } \leq \text{ змінився на } \geq)$$

Загальна
схема

Випадки
 $\exists a = 0$

Числові
проміжки

Подвійні
нерівності

Схема розв'язування лінійної нерівності

Будь-яка лінійна нерівність зводиться до найпростішого вигляду $ax > b$ (де $a \neq 0$):

Випадок 1: Якщо $a > 0$ (знак не змінюється)

$$ax > b \Rightarrow x > \frac{b}{a} \Rightarrow x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$$

Випадок 2: Якщо $a < 0$ (знак змінюється)

$$ax > b \Rightarrow x < \frac{b}{a} \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$$

Загальна
схема

Випадки
 $\exists a = 0$

Числові
проміжки

Подвійні
нерівності

Особливі випадки: коли $a = 0$

Нерівність набуває вигляду $0 \cdot x > b$ або $0 \cdot x < b$. Оскільки $0 \cdot x = 0$ для будь-якого x :

Підвипадок 1: Нерівність правильна (безліч розв'язків)

$$0 \cdot x > -5 \Rightarrow 0 > -5 \text{ (істинно)} \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$$

Підвипадок 2: Нерівність неправильна (розв'язків немає)

$$0 \cdot x > 5 \Rightarrow 0 > 5 \text{ (хибно)} \Rightarrow x \in \emptyset \text{ (немає розв'язків)}$$

Загальна схема	Випадки $\exists a = 0$	Числові проміжки	Подвійні нерівності
-------------------	----------------------------	---------------------	------------------------

Запис проміжків та точки на прямій

Тип нерівності визначає вигляд дужок та зафарбованість точок:

Строгі нерівності ($>$ або $<$):

$$x > a \iff x \in (a; +\infty) \quad (\text{кругла дужка, виколота точка } \circ)$$

Нестрогі нерівності ($\geq$ або $\leq$):

$$x \geq a \iff x \in [a; +\infty) \quad (\text{квадратна дужка, зафарбована точка } \bullet)$$

Загальна схема	Випадки $\exists a = 0$	Числові проміжки	Подвійні нерівності
-------------------	----------------------------	---------------------	------------------------

Подвійні лінійні нерівності

Нерівність виду $a < f(x) \leq b$ розв'язується одночасним виконанням однакових перетворень над усіма трьома частинами:

Квадратні нерівності

Базовий вигляд: $ax^2 + bx + c > 0$ (або $<, \geq, \leq$)

Перед розв'язуванням завжди зручно зробити старший коефіцієнт додатним ($a > 0$). Якщо $a < 0$, помножте всю нерівність на -1 , **змінивши знак нерівності на протилежний**:

$$-x^2 + 5x - 6 > 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 < 0$$

Метод параболи
($D > 0$)

Метод
інтервалів

Випадки
коли $D \leq 0$

Алгоритм
розв'язання

Графічний метод (парабола з гілками вгору, $a > 0$)

Якщо $D > 0$, квадратне рівняння має два корені $x_1 < x_2$. Парабола перетинає вісь Ox у двох точках:

1. Знак менше ($ax^2 + bx + c < 0$) — частина під віссю (між коренями):

$$x^2 - bx + c < 0 \rightarrow x \in (x_1; x_2)$$

2. Знак більше ($ax^2 + bx + c > 0$) — частини над віссю (зовні коренів):

$$x^2 - bx + c > 0 \rightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$$

Приклад: $x^2 - 4x - 5 \leq 0$

$$\text{Корені: } x_1 = -1, x_2 = 5 \rightarrow x \in [-1; 5]$$

Метод параболи
($D > 0$)

Метод
інтервалів

Випадки
коли $D \leq 0$

Алгоритм
розв'язання

Розклад на множники та метод інтервалів

Квадратний тричлен розкладається на множники: $a(x - x_1)(x - x_2)$.

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \quad \text{або} \quad (x - x_1)(x - x_2) < 0$$

Наносимо нулі функції на числову пряму та розставляємо знаки справа наліво: $+$, $-$, $+$ (якщо перед кожним x додатний коефіцієнт).

Метод параболи ($D > 0$)	Метод інтервалів	Випадки коли $D \leq 0$	Алгоритм розв'язання
-------------------------------	---------------------	----------------------------	-------------------------

Випадки $D = 0$ та $D < 0$ (при $a > 0$)

Коли парабола не перетинає вісь або дотикається до неї:

Якщо $D < 0$ (парабола повністю вище осі Ox):

$$\left(ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty) \quad (\text{безліч розв'язків}) \right.$$

$$\left(ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow x \in \emptyset \quad (\text{розв'язків немає}) \right.$$

Якщо $D = 0$ (парабола дотикається в точці $x_0 = -\frac{b}{2a}$):

$$\left((x - x_0)^2 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty) \right.$$

$$\left((x - x_0)^2 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty) \quad (x \neq x_0) \right.$$

$$\left((x - x_0)^2 \leq 0 \Rightarrow x = x_0 \right.$$

Метод параболи ($D > 0$)	Метод інтервалів	Випадки коли $D \leq 0$	Алгоритм розв'язання
-------------------------------	---------------------	----------------------------	-------------------------

Покроковий алгоритм розв'язання

1. Перенести всі доданки в ліву частину, щоб праворуч залишився 0.
2. Зробити коефіцієнт $a > 0$ (якщо $a < 0$, домножити на -1 і розвернути знак нерівності).
3. Знайти дискримінант $D = b^2 - 4ac$ та корені x_1, x_2 .
4. Нанести корені на вісь (виколоті $\circ$ для строгої нерівності або зафарбовані $\bullet$ для нестрокої).
5. Записати відповідь у вигляді числового проміжку.

Важливо! Головне застереження дробових нерівностей

Ніколи **не множте** нерівність на знаменник зі змінною без урахування його знака! Знаменник не може дорівнювати нулю ($Q(x) \neq 0$), тому точки із знаменника на числовій прямій **завжди виколоті** (*).

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Алгоритм
інтервалів

Рівносильні
системи

Практичний
приклад

Кратні
корені

Алгоритм методу інтервалів

- Зведення до стандартного вигляду:** за допомогою перенесень та зведення до спільного знаменника отримати вигляд $f(x) < 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) > 0$ або $f(x) \geq 0$, де $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.
- Область визначення (ОДЗ):** знайти значення, при яких знаменник не дорівнює нулю ($Q(x) \neq 0$).
- Нулі функції:** знайти корені рівняння $f(x) = 0$ (розв'язавши $P(x) = 0$).
- Розбиття на інтервали та знаки:** нанести нулі чисельника і знаменника на пряму з урахуванням ОДЗ. Визначити знак виразу на кожному інтервалі.
- Запис відповіді:** виписати відповідні проміжки за знаком нерівності, враховуючи ОДЗ.

Метод переходу до рівносильних систем

Знак частки збігається зі знаком добутку, що дозволяє замінити дробову нерівність на систему або сукупність систем:

1. Для нестрогих нерівностей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \iff \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \iff \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

2. Через розбиття на дві системи однакових / різних знаків:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \iff \begin{cases} \begin{cases} P(x) > 0 \\ Q(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} P(x) < 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Показникові нерівності

Важливо! Властивість показникової функції ($a^x > 0$)

Оскільки показникові вирази набувають лише додатних значень, знак та розв'язки порівняння з неперитивним числом визначаються миттєво:

$$a^{f(x)} > -3 \implies x \in (-\infty; +\infty) \quad (\text{виконується завжди})$$

$$a^{f(x)} \leq 0 \implies x \in \emptyset \quad (\text{розв'язків немає})$$

Спільна
основа

Винесення
за дужки

Заміна
змінної

Головне правило: залежність знака від основи a

Якщо нерівність зведено до вигляду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$:

1. Якщо $a > 1$ (функція зростає, знак зберігається):

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \implies f(x) > g(x)$$

2. Якщо $0 < a < 1$ (функція спадає, знак розвертається):

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \implies f(x) < g(x)$$

Спільна
основа

Винесення
за дужки

Заміна
змінної

Змінна
основа

Винесення найменшого степеня за дужки

Застосовується до сум і різниць показникових виразів з однаковою основою:

Спільна
основа

Винесення
за дужки

Заміна
змінної

Зведення до квадратних нерівностей через заміну

Якщо нерівність містить вирази виду a^{2x} та a^x , вводимо змінну $t = a^x$ з обов'язковою умовою $t > 0$:

Логарифмічні нерівності

Важливо! Обов'язкове врахування ОДЗ

Підлогарифмічний вираз завжди має бути **строго більшим за нуль**. При переході від логарифмів до аргументів умова ОДЗ обов'язково включається в систему:

$$\log_a f(x) > b \iff \log_a f(x) > \log_a a^b \quad (\text{де } f(x) > 0, a > 0, a \neq 1)$$

Базові
системи

Заміна
змінної

Застосування
властивостей
логарифмів

Перехід до системи нерівностей для $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

Напрямок знака нерівності залежить від величини основи a :

1. Якщо $a > 1$ (функція зростає, знак зберігається):

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

2. Якщо $0 < a < 1$ (функція спадає, знак розвертається):

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Базові
системи

Заміна
змінної

Застосування
властивостей
логарифмів

Метод заміни змінної

Нерівності виду $A \log_a^2 x + B \log_a x + C > 0$ зводяться до квадратних заміною $t = \log_a x$. Для змінної t немає обмеження $t > 0$ ($t \in \mathbb{R}$):

Застосування властивостей логарифмів та ОДЗ

Перед застосуванням формул обов'язково фіксуйте початкову область визначення (ОДЗ), щоб не втратити та не додати сторонні розв'язки:

1. Сума логарифмів (перехід до добутку):

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x) \cdot g(x)) \quad (\text{ОДЗ: } f(x) > 0, g(x) > 0)$$

2. Різниця логарифмів (перехід до частки):

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \quad (\text{ОДЗ: } f(x) > 0, g(x) > 0)$$

3. Винесення парного степеня:

$$\log_a (f(x))^{2k} = 2k \cdot \log_a |f(x)| \quad (\text{обов'язково ставимо модуль})$$

Додаток Ж

Підбірка завдань для коригування помилок під час роботи з числовою прямою під час застосування методу інтервалів до розв'язування раціональних нерівностей

$$1) (x-1)(x-2)(x+3) > 0;$$

$$9. (x-1)(x-2)(x+3) < 0;$$

$$10. (1-x)(x-2)(x+3) > 0;$$

$$11. (x-1)^2(x-2)(x+3) > 0;$$

$$12. (x-1)^2(x-2)(x+3) \geq 0;$$

$$13. (x-1)^2(x-2)(x+3) \leq 0;$$

$$14. (x-1)^2(x-2)(x+3) < 0;$$

$$15. \frac{(x-2)(x+3)}{x-1} > 0;$$

$$16. \frac{(x-2)(x+3)}{x-1} \geq 0;$$

$$17. \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)^2} > 0;$$

$$18. \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)^2} \geq 0;$$

$$19. \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)^2} \leq 0;$$

$$20. \frac{(x-2)^2(x+3)}{(x-1)} > 0;$$

$$21. \frac{(x-2)^2(x+3)}{(x-1)} \leq 0.$$

Додаток К

Приклади завдань розділу «Нерівності», реалізовані під час діагностичного тесту, структура і порядок якого наведено у таблиці 2.5 розділу 2

Завдання 1. Знайдіть множину розв'язків нерівності $7x - 1 > 3x + 7$.

А	Б	В	Г	Д
$(4; +\infty)$	$(-\infty; 0,6)$	$(-\infty; 2)$	$(2; +\infty)$	$(1,5; +\infty)$

Ключ: Г

Розв'язання. Перенесемо $3x$ вліво, а -1 вправо, тоді з $4x > 8$ одержимо $x > 2$.

Отже, маємо відповідь Г.

Коментар. Під час розв'язування цього завдання типові помилки, які можуть виникнути в учня, пов'язані з неправильним перенесенням доданків з однієї частини нерівності в іншу (дистрактори Б, Д), необгрунтованою зміною знаку нерівності або вибором не того напрямку на числовій прямій (дистрактори Б, В), а також виконання дії віднімання замість ділення при знаходженні невідомого множника (дистрактор А).

Зауважимо, що відповідь із варіанту Б досягається при допущенні одразу декількох помилок (неправильне перенесення доданків між частинами нерівності та необгрунтована зміна знаку нерівності), а тому отримання цього результату може свідчити або про фрагментарні знання щодо властивостей нерівностей і перетворення виразів, або про застосування вгадування.

Варіант В може бути результатом двох типових помилок: або було необгрунтовано змінено знак нерівності, або розв'язано правильно, проте обрано не той проміжок на числовій прямій. Тож у коментарі, який буде відображено при виборі цього варіанту відповіді, звернемо увагу на обидва аспекти.

Завдання 2. Установіть відповідність між нерівністю (1-3) та розв'язком (А-Д).

Нерівність (1-3)

1. $x^2 + 2x - 3 > 0$

2. $(x - 1)(x + 3) < 0$

3. $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$

Розв'язок (А-Д)

А. $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$

Б. $(-\infty; -3)$

В. $(-3; 1)$

Г. $[-3; 1]$

Д. $(-3; 1]$

Ключ: 1-А, 2-В, 3-Д.

Розв'язання. Першу нерівність розв'яжемо графічно за допомогою ескізу параболи вітками вгору, яка перетинає вісь абсцис у точках $x_1 = -3$ та $x_2 = 1$ (рис. 2.4). Оскільки знак нерівності «строго більше», обираємо ті проміжки, де відповідна квадратична функція набуває додатних значень (вітки параболи знаходять вгорі). Одержуємо, що $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$, тобто відповідь А.

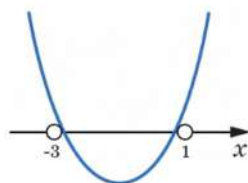


Рис. 2.4

Другу та третю нерівність розв'яжемо методом інтервалів. Позначивши на числовій прямій точки $x_1 = -3$ та $x_2 = 1$ і розбивши її на три числові інтервали, проставимо знаки на інтервалах (рис. 2.5).

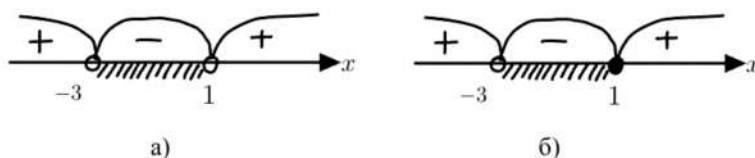


Рис. 2.5

Для обох нерівностей обираємо інтервал зі знаком мінус, проте врахуємо, що друга нерівність строга (нулі функції у відповідь не включаємо, рис. 2.5 (а)), а третя – нестрога (рис. 2.5 (б)). Проте в третій нерівності також варто врахувати, що точка $x = -3$

не входить в область допустимих значень виразу, а тому її у відповідь не включаємо. Таким чином, одержуємо відповіді В і Д у другому та третьому пункті відповідно.

Коментар. Зауважимо, що першу нерівність можемо реалізувати за допомогою методу інтервалі також. Звісно, другу нерівність можна розглянути як квадратичну і розв'язати за допомогою параболи або, як і третю, – через сукупність двох систем, проте, як зазначали раніше, будемо розглядати метод інтервалів як основний спосіб розв'язування раціональних та дробово-раціональних нерівностей. У той же час, на етапі повторення та систематизації не вважаємо за потрібне «перевчати» учнів, які успішно і самостійно застосовують до розв'язування нерівностей такого типу альтернативні методи.

Під час розв'язування першої нерівності що за допомогою параболи, що методом інтервалі основною помилкою є вибір не тієї частини числової прямої у відповідь, що відповідатиме варіанту В. Типовою помилкою у розв'язуванні другої нерівності є пряма аналогія із рівнянням типу «добуток дорівнює нулю», коли учні пишуть, що кожен множник має бути менше нуля. Такі міркування приведуть до вибору дистрактора Б. Аналогічна помилка через подібні міркування можлива і в третій нерівності, проте для неї також характерним є не врахування учнями області допустимих значень дробово-раціонального виразу і включення точки « -3 » у проміжок, що є відповіддю.

Завдання 3. Розв'яжіть нерівність $(\frac{1}{3})^x \leq \frac{1}{27}$.

А	Б	В	Г	Д
$[3; +\infty)$	$[9; +\infty)$	$(-\infty; 3]$	$(-\infty; \frac{1}{9}]$	$(-\infty; 9]$

Ключ: А

Розв'язання. Маємо $(\frac{1}{3})^x \leq (\frac{1}{3})^3$. Оскільки $0 < \frac{1}{3} < 1$, то $x \geq 3$. Отже, маємо відповідь, записану у варіанті А.

Коментар. Типовою помилкою при розв'язанні цієї показникової нерівності після зведення лівої і правої частини до однакової основи буде не врахування того, що функція $y = (\frac{1}{3})^x$ спадна, а отже перехід до показників має супроводжуватися зміною знака нерівності. У такому випадку буде обрано дистрактор В. Також помилка може бути пов'язана з неправильним визначенням показника степеня в правій частині, коли замість $\frac{1}{27} = (\frac{1}{3})^3$ визначають $\frac{1}{27} = (\frac{1}{3})^9$, переплутавши дії множення та піднесення до степеня для

знаменника. Якщо при цьому враховано, що функція спадна і правильно виконана зміна знаку при переході до показників, то буде одержано дистрактор Б, якщо зміну знаку було не враховано, то – дистрактор Д. Ще однією можливою помилкою є розв'язання показникової нерівності як лінійної, сприймаючи показник як множник. У такому випадку буде обрано варіант Г.

Завдання 4. Знайдіть розв'язки нерівності $\log_5(x - 2) < 1$.

А	Б	В	Г	Д
(2; 5)	(0; 7)	(2; 7)	(7; $+\infty$)	($-\infty$; 7)

Ключ: В

Розв'язання. За означенням логарифма маємо $x - 2 < 5^1$, звідки $x < 7$. Врахуємо ОДЗ: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$. Таким чином, одержуємо проміжок (2; 7) і, відповідно, варіант В.

Коментар. При розв'язуванні цієї нерівності типовою помилкою буде неврахування області допустимих значення логарифму (дистрактор Д) або помилкове його врахування як $x > 0$ замість додатного значення для всього підлогарифмічного виразу (дистрактор Б). У варіанті А відображено ситуацію, коли учнем визначено ОДЗ, правильно обчислено підлогарифмічний вираз логарифма з основою п'ять, який набуває значення 1, проте не враховано, що підлогарифмічний вираз не x , а $(x - 2)$ і, відповідно не перенесено двійку у праву частину. Дистрактор Г враховує помилку через необгрунтовану зміну знаку нерівності, адже в даному випадку функція зростаюча, а отже, знак нерівності зберігається.

Завдання 5. Знайдіть розв'язок системи $\begin{cases} x + 5 > 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(4; $+\infty$)	(-5; 4)	(-4; 5)	($-\infty$; -5)	$x \in \emptyset$

Ключ: Б

Розв'язання. З першої нерівності одержуємо $x > -5$, з другої нерівності маємо $-x > -4 \Rightarrow x < 4$. Перетином множин є проміжок (-5; 4), що відображено у відповіді Б.

Коментар. Розповсюдженою помилкою при розв'язанні даної системи є не врахування зміни знаку нерівності при діленні другої нерівності на (-1). У такому випадку буде одержано варіант А. Можливим варіантом є також і «зловживання» зміною знаків нерівності, а саме хибне застосування цієї властивості в першій нерівності, через що буде

одержано варіант Г. При помилковому визначенні знаків нерівності в обох нерівностях системи буде одержано на числовій прямій дві множини, що не мають перетину, що відповідає дистрактору Д. Варіант відповіді В враховує ситуацію, коли учні візуально визначають числа (умовно розв'язки) з кожної нерівності, не зважаючи на правила перенесення доданків з однієї частину в іншу, і обирають відповідь з цими числами. Вибір такого варіанту відповіді може свідчити про відсутність системного підходу і вгадування відповіді за візуальними ознакам.

Завдання 6. Укажіть число, яке є розв'язком нерівності $x^2 > 16$.

А	Б	В	Г	Д
4	-4	3	-5	0

Ключ: Г

Розв'язання. Оскільки квадрат змінної більший за 16, то сама змінна має бути або більшою за 4, або меншою за -4. Серед запропонованих варіантів маємо лише один варіант, який задовольняє ці вимоги, тобто варіант Г.

Коментар. Для розв'язку даного завдання достатньо застосувати метод безпосередньої підстановки варіантів відповіді в умову. Проте і таку ситуацію вважаємо сприятливою для розв'язку завдання початкового рівня, оскільки учень повинен, щонайменше, володіти розумінням того, що вважається коренем рівняння, враховувати строгість нерівності. Відповідно, вибір одного із дистракторів А або Б свідчить про неврахування строгості нерівності, а варіантів А або Д – про помилку у порівнянні чисел.

Завдання 7. Укажіть проміжок, який є розв'язком нерівності $\frac{2}{x} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 2)$	$(0; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Ключ: Б

Розв'язання. Оскільки чисельник дробу додатний, то і знаменник має бути додатним, що і відображено у варіанті Б.

Коментар. Дистрактор Г відображає ситуацію з необгрунтованою зміною знаку нерівності, яка може бути пов'язана з недоречним до цієї ситуації застосуванням властивості про зміну знаку при заміні додатних частин нерівності на обернені значення. Для завдань

початкового рівня припускаємо, що деякі учні можуть при визначенні розв'язку керуватися візуальними характеристиками умови. Наприклад, ігноруючи структуру дробу і просто комбінуючи видимі елементи нерівності може бути обрано дистрактор В. Через структурну схожість з нерівністю $\frac{2-x}{x} > 0$ може бути одержано варіант А. В обох цих випадках прослідковується фрагментарність знань і поверхнєве сприйняття візуальних елементів завдання. Варіант Д відображає ситуацію, коли замість нерівності учнем було визначено лише область допустимих значень виразу. Це може бути як і незавершене розв'язання нерівності, так і дезорієнтація в темах і буквально виконання іншого завдання. При виборі цього дистрактора вважаємо, що учню необхідно наголосити на різниці між розв'язанням рівняння, нерівності та завдання на знаходження ОРЗ виразу або області визначення функції. Тому у коментарі до цього дистрактора запишемо і правильний розв'язок даної нерівності, і розв'язок рівняння $\frac{2}{x} = 0$, і завдання на знаходження області визначення функції $y = \frac{2}{x}$ для візуалізації різниці між цих завдань.

Завдання 8. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} x > 5; \\ x < 3. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(5; +\infty)$	$(-\infty; 3)$	$(3; 5)$	$(-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$	$\emptyset$

Ключ: Д

Розв'язання. Зобразивши розв'язки першої і другої нерівності на одній числовій прямій (рис. 2.6), бачимо, що множини цих розв'язків не мають спільних елементів, отже

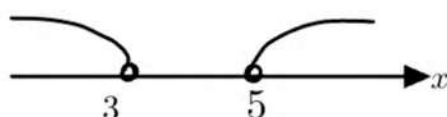


Рис. 2.6

маємо порожню множину у розв'язку системи, тобто варіант Д.

Коментар. Дистрактори А, Б, В враховують різні варіації помилкового зображення множин розв'язків на числовій прямій або формування хибних висновків за зображенням на числовій прямій. Вибір варіанту Г свідчить про те, що учнем правильно зображено розв'язки нерівностей на числовій прямій, проте замість перетину множин обрано об'єднання цих

множин, що свідчить про потребу акцентувати увагу на різниці між системою та сукупністю нерівностей і, відповідно, визначенням перетину та об'єднання множин. Також за такої відповіді звертаємо увагу учня (і відображаємо це в коментарі до дистрактора), що за відсутності спільного розв'язку перетином множин є порожня множина.

Завдання 9. Установіть відповідність між нерівністю (1–3) та множиною її розв'язків (А–Д).

Нерівність (1-3)

1. $5 - 2(x - 1) < 11$

2. $4^{x+1} > 16 \cdot 2^x$

3. $\lg(2x - 4) < \lg(x + 1)$

Розв'язок (А-Д)

А. $(2; +\infty)$

Б. $(-\infty; -2)$

В. $(2; 5)$

Г. $(-2; +\infty)$

Д. $(-\infty; 5)$

Ключ: 1-Г, 2-А, 3-В.

Розв'язання. Першу нерівність розв'яжемо, розкривши дужки, перенісши змінні вліво, числа вправо та звівши подібні доданки, звідки одержимо $-2x < 4 \Rightarrow x < -2$, що відповідає варіанту Г.

У другій нерівності представимо всі степені через основу два та застосуємо властивість про множення степенів з однаковою основою в правій частині. Враховуючи монотонність показникової функції, одержуємо $x > 2$, тобто варіант А.

У третій нерівності перейдемо до рівносильної системи $\begin{cases} 2x - 4 \leq x + 1; \\ 2x - 4 > 0; \end{cases}$.

Розв'язавши систему, одержуємо $x \in (2; 5]$, що відповідає варіанту В.

Коментар. Дані завдання відносяться до достатнього рівня, а тобто мають декілька кроків у розв'язанні, а отже маємо більше моментів, де є ризик виникнення помилки, зокрема арифметичної. Проте у формуванні дистракторів будемо орієнтуватися пріоритетно на властивості нерівностей. Таким чином, типовою помилкою для першого завдання буде упущення зміни знаку нерівності при діленні на від'ємне число, що приведе до відповіді Б. Також варіанти Б і Д є дистракторами для другої нерівності, які враховують помилку зі знаками при перенесенні доданків з однієї частини в іншу після переходу до показників і хибно виконану зміну знаку нерівності на етапі або переходу до показників, або при діленні

на додатні число. Для третьої нерівності основною помилкою є не врахування області допустимих значень, що приведе до хибної відповіді Д.

Завдання 10. Знайдіть значення параметра a , при якому розв'язком нерівності $(a - 4)x \geq a^2 - 16$ є проміжок $(-\infty; -1]$.

Ключ: -5

Розв'язання. Оскільки за умовою розв'язком нерівності має бути проміжок $(-\infty; -1]$, тобто $x \leq -1$, то порівняно з умовою, відбулася зміна знаку нерівності, а отже, коефіцієнт перед змінною має бути від'ємним. Таким чином, при діленні даної нерівності на $(a - 4)$, одержуємо $x \leq \frac{a^2 - 16}{a - 4}$. Використовуючи формулу різниці квадратів, спростимо дріб: $x \leq \frac{(a-4)(a+4)}{a-4} \Rightarrow x \leq a + 4$. Одержаний розв'язок $x \in (-\infty; a + 4]$ за умовою дорівнює проміжку $(-\infty; -1]$. Прирівнявши праві межі, отримуємо, що $a = -5$. Виконавши перевірку, переконаємося, що це буде відповіддю.

Коментар. Ключовим моментом у розв'язку цієї нерівності є ділення на вираз $(a - 4)$, тому важливо зауважити з умови, що для цієї задачі він має бути від'ємним. Проте зауважимо, що можна було розглянути традиційно три варіанти для коефіцієнту перед змінною ікс ($a - 4 > 0$, $a - 4 < 0$ і $a - 4 = 0$) і розв'язати нерівність для кожного із цих випадків і лише потім порівняти з проміжком із умови

Додаток Л

Структурні особливості розробки та кодування завдань, а також логіки генерування тестів до розділу Н «Планіметрія» змістового тематичного класифікатора завдань

1. На початку опрацювання розділу учням за аналогічним алгоритмом, як і для змістової лінії «Рівняння та нерівності» пропонується діагностичний тест. Проте для тем «Трикутники» і «Чотирикутники» не першому етапі завдань (які відповідають середньому рівню навчальних досягнень) генерується не менше як два завдання з огляду на обсяг цих тем. Середній рівень навчальних досягнень з кожної із цих тем вважається досягнутим при виконанні усіх завдань теми, що цього рівня стосуються.

2. Комбіновані завдання, тобто ті, що стосуються кількох тем, можуть бути у вигляді завдань на встановлення відповідності або у вигляді окремих завдань, які належать до кількох тем. Для завдань на відповідність, крім самого завдання, де на місці номеру теми позначається цифра нуль, кодується кожен пункт цього номеру із зазначенням конкретної теми. У прикладі 6 наведено завдання на відповідність середнього рівня, у якому кожен пункт стосується різних тем розділу. Таке завдання буде закодовано як $H0qy_N$, де N – його порядковий номер у банку завдань. Оскільки кожен пункт завдання стосується конкретної теми (перший – чотирикутники, другий – коло і круг, третій – трикутники), то код кожного пункту завдання виглядатиме таким чином: 1) $H0\{3\}qy_N$, 2) $H0\{5\}qy_N$, 3) $H0\{2\}qy_N$.

Приклад 6. Установіть відповідність між елементами геометричної фігури (1-3) та їх довжинами (А-Д).

Елемент геометричної фігури (1-3)	Довжина (А-Д)
1. Середня лінія трапеції, основи якої дорівнюють 17 см і 23 см;	А. 6 см
2. Хорда, що проходить через центр кола радіуса 6 см;	Б. 11 см
3. Бічна сторона рівнобедреного трикутника з периметром 32 см і основою 10 см.	В. 12 см
	Г. 20 см
	Д. 22 см

Ключ: 1-Г, 2-В, 3-Б.

Якщо завдання комбіноване і відносно рівносильно стосується кількох тем, то воно кодується через цифру нуль на місці номера теми, але програмно встановлюється зв'язок із уроками до відповідних тем. Також у розв'язках до завдання вказується коментар про зв'язок із цими темами. Проте на етапі діагностичного тесту уникаємо використання комбінованих завдань за винятком, хіба що, завдань високого рівня. Пропонуємо використовувати такі завдання переважно в тренувальних комплексних тестах. Це пов'язано з тим, що зміст кожної теми є досить широким і вже через це може виникати ризик похибки у визначенні рівня навчальних досягнень за кількома завданнями, тому на етапі діагностики обираємо завдання з чіткою належністю до теми.

3. Під час підбору та розробки завдань використаємо систему коментарів як для розробників завдань, так і для викладачів, які будуть супроводжувати учня під час роботи із завданнями. Для викладача зазначимо зв'язок комбінованих завдань із темами розділу, а також опосередкований зв'язок завдань однієї теми з іншими темами у ситуаціях, де це потрібно. Для розробника збережемо логіку формування дистракторів для завдань із альтернативами та на встановлення відповідності з метою створення подібних завдань для розширення банку завдань. Також, збережемо промпти для засобів ІШ, за допомогою яких було створено чи адаптовано завдання, підібрано альтернативи, згенеровано зображення, відео та інші візуальні чи інтерактивні елементи.

Планіметрія

1. Логічні основи

2. Найпростіші фігури

3. Трикутники

4. Чотирикутники

5. Многокутники

6. Коло і круг

Логічні основи геометрії

Геометрія будується на чіткій логічній структурі, яка дозволяє виводити складні твердження з найпростіших.



Аксіоми

Аксіома — це твердження, яке приймається без доведення. Вони є фундаментом геометрії.

Приклади:

- Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.
- З будь-якої точки можна провести коло будь-якого радіуса.
- Усі прямі кути рівні між собою.



Теореми

Теорема — це твердження, істинність якого встановлюється шляхом міркувань (доведення), спираючись на аксіоми та раніше доведені теореми.

Теорема складається з:

- **Умови** (те, що дано).
- **Висновку** (те, що треба довести).

Означення та Ознаки

Означення описує, що таке фігура (наприклад: "Паралелограм — це чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні").

Ознака вказує на умови, за яких фігура належить до певного класу (наприклад: "Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то це паралелограм").

Структурно-логічні схеми до розділу «Планіметрія»

1. Логічні основи

2. Найпростіші фігури

3. Трикутники

4. Чотирикутники

5. Многокутники

6. Коло і круг

Найпростіші геометричні фігури на площині

З цих основних "цеглинок" будуються всі інші геометричні фігури.

Точка

Найменший геометричний об'єкт, який не має розмірів. Позначається: A, B, C .

• A

Пряма

Нескінченна лінія, що не має ні початку, ні кінця.



Промінь

Частина прямої, що має початок, але не має кінця.



Відрізок

Частина прямої, обмежена двома точками (кінцями).



Кут

Фігура, утворена двома променями, що виходять з однієї точки (вершини).

Гострий: $< 90^\circ$

Прямий: $= 90^\circ$

Тупий: $> 90^\circ, < 180^\circ$

Розгорнутий: $= 180^\circ$

Суміжні та вертикальні кути

Суміжні кути

Мають спільну сторону, а дві інші є доповняльними променями.

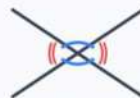
Властивість: Сума суміжних кутів дорівнює 180° ($\alpha + \beta = 180^\circ$).



Вертикальні кути

Сторони одного кута є доповняльними променями сторін іншого.

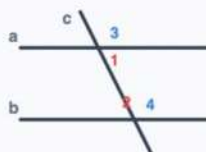
Властивість: Вертикальні кути рівні.



Кути при паралельних прямих і січній

Якщо дві паралельні прямі ($a \parallel b$) перетнуті третьою (січною c), утворюються кути з такими властивостями:

- **Внутрішні різносторонні кути (1 і 2)** рівні між собою.
- **Відповідні кути (3 і 4)** рівні між собою.
- Сума **внутрішніх односторонніх кутів** дорівнює 180° (наприклад, $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$).



Трикутники

Трикутник — фігура, що складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, що їх сполучають.

Загальні властивості довільного трикутника:

- Сума кутів завжди дорівнює 180° : $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.
- **Нерівність трикутника:** Будь-яка сторона менша за суму двох інших сторін ($a < b + c$).
- Проти більшої сторони лежить більший кут.
- **Теорема синусів:** Сторони пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

(де R — радіус описаного кола)

- **Теорема косинусів:** Квадрат сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

• Формули площі (S):

- Через сторону і висоту: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$
- Через дві сторони і кут між ними: $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$
- За формулою Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (де p — півпериметр, $p = \frac{a+b+c}{2}$)
- Через радіус **вписаного** кола (r): $S = p \cdot r$
- Через радіус **описаного** кола (R): $S = \frac{abc}{4R}$

Види трикутників (від загального до часткового)

Різносторонній (Довільний)

Всі сторони різної довжини, всі кути різні.



Рівнобедрений

Дві сторони (бічні) рівні.

- Кути при основі рівні.
- Медіана, бісектриса і висота, проведені до основи, співпадають.

Прямокутний

Один кут прямий (90°). Сторони: катети (a, b) і гіпотенуза (c).

- **Теорема Піфагора:** $c^2 = a^2 + b^2$.
- Центр описаного кола — середина гіпотенузи.
- Площа: $S = \frac{1}{2}ab$.

Тригонометричні функції гострого кута α :

$$\sin \alpha = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{прилеглий катет}}$$



Правильний (Рівносторонній)

Окремий випадок рівнобедреного: всі сторони рівні.

- Всі кути рівні 60° .
- Усі медіани, бісектриси і висоти співпадають.
- Центри вписаного і описаного кіл співпадають.
- $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Чотирикутники

Сума кутів будь-якого опуклого чотирикутника дорівнює 360° .

Ієрархія чотирикутників

Довільний чотирикутник

4 сторони, 4 кути.

Додаємо паралельність сторін

Паралелограм

Протилежні сторони попарно паралельні.

- Протилежні сторони і кути рівні.
- Діагоналі точкою перетину діляться навпіл.
- Сума кутів, прилеглих до однієї сторони, 180° .
- Площа: $S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha$.

+ Прямі кути



Прямокутник

- Всі кути прямі (90°).
 - Діагоналі рівні ($d_1 = d_2$).
- $$S = a \cdot b$$

+ Рівні сторони



Ромб

- Всі сторони рівні.
 - Діагоналі перпендикулярні ($d_1 \perp d_2$) і є бісектрисами кутів.
- $$S = a \cdot h = \frac{1}{2}d_1d_2$$



Квадрат

Об'єднує властивості прямокутника і ромба

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}$$

Трапеція

Тільки дві протилежні сторони паралельні (основи).

- Середня лінія паралельна основам і дорівнює їх півсумі: $m = \frac{a+b}{2}$.

- Площа: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = m \cdot h$.

- **Види трапецій:**
 - Рівнобічна (бічні сторони рівні).
 - Прямокутна (одна бічна сторона перпендикулярна основам).

Многокутники

Опуклі многокутники

Многокутник називається **опуклим**, якщо він лежить по один бік від будь-якої прямої, що містить його сторону.

Основні формули для n -кутника:

Сума внутрішніх кутів:

$$180^\circ \cdot (n - 2)$$

Кількість діагоналей:

$$\frac{n(n - 3)}{2}$$

Сума зовнішніх кутів:

Завжди 360° .

Правильні многокутники

Многокутник називається **правильним**, якщо в нього **всі сторони рівні** і **всі кути рівні**.

- Навколо будь-якого правильного многокутника можна **описати коло**.
- В будь-який правильний многокутник можна **вписати коло**.
- Центри вписаного і описаного кіл **співпадають**.
- Внутрішній кут правильного n -кутника:

$$\alpha = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$$

Коло і Круг

Коло

Геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра).

Довжина кола:

$$C = 2\pi R = \pi D$$

Довжина дуги (l):

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha$$

Елементи:

Радіус (R): від центра до точки на колі.

Хорда: сполучає дві точки кола.

Діаметр (D): хорда через центр ($D = 2R$).

Круг

Частина площини, обмежена колом.

Площа круга:

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

Частини круга:

Сектор: обмежений двома радіусами і дугою.

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$$

Сегмент: обмежений хордою і дугою.

Кути в колі:

Центральний кут

Вершина в центрі кола. Вимірюється дугою, на яку спирається.

Вписаний кут

Вершина на колі. Дорівнює половині дуги, на яку спирається.

* Вписаний кут, що спирається на діаметр — прямий (90°).

Додаток Н

Приклади завдань розділу «Планіметрія», реалізовані під час діагностичного тесту,
структура і порядок якого наведено у таблиці 2.6 розділу 2

Завдання 1. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB . Знайдіть градусну міру кута COB , якщо $\angle AOB = 120^\circ$, а $\angle AOC$ становить $\frac{1}{3}$ від кута AOB .

А	Б	В	Г	Д
30°	40°	60°	80°	90°

Ключ: Г

Розв'язання. $\angle AOC = \frac{1}{3} \cdot 120^\circ = 40^\circ$.

Тоді $\angle COB = \angle AOB - \angle AOC = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.

Коментар. Вибір дистрактору Б може свідчити або про недорозв'язану задачу (знайдено кут AOC , проте недораховано шуканий), або на рисунку позначено шуканий кут як третину від даного, що суперечить умові. Загалом за вибором варіанту Б можна припускати, що учень орієнтується в застосуванні властивостей вимірювання кутів, проте має складності з читанням умови. При хибному узагальненні променя, що ділить кут, до поняття бісектриси учнем буде отримано варіант В. Дистрактори А і Д імовірно будуть отримані при допущенні арифметичної помилки в розрахунках (наприклад, $120:3=90$) і, якщо обрано варіант А, не завершенні розв'язку.

Завдання 2. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Яким цілим числом сантиметрів може дорівнювати третя сторона цього трикутника?

А	Б	В	Г	Д
5 см	7 см	12 см	17 см	18 см

Ключ: В

Розв'язання. За нерівністю трикутника: $|a - b| < c < a + b$, тобто $12 - 5 < c < 12 + 5 \Rightarrow 7 < c < 17$. Серед наведених варіантів цю умову задовольняє лише варіант 12 см.

Коментар. Часто зустрічаємо ситуацію, коли учень пам'ятає нерівність трикутника у формулюванні, що сума будь-яких двох сторін трикутника повинна бути більшою за третю сторону. Зауважимо, що навіть за такого підходу і без використання подвійної нерівності може бути досягнуто правильного результату шляхом прямого перебору варіантів відповіді та їх перевірки на виконання нерівності трикутника. Вибір дистракторів Б або Г свідчить про неврахування строгості знаку нерівності трикутника і, відповідно, вибір граничного значення, коли три точки лежать на одному відрізку. Дистрактор А та Г можуть бути одержані або при помилці зі знаком у запису нерівності трикутника (особливо якщо учні формулюють її не через подвійну нерівність, а як «сума двох сторін більша за третю»), або при перевірці виконання нерівності для суми більших сторін порівняно з меншою. При отриманні помилки в цьому завданні варто звернути увагу учня на запис нерівності трикутника саме через подвійну нерівність і на строгість знаків нерівності в цьому записі.

Завдання 3. Основи трапеції відносяться як 3:7, а її середня лінія дорівнює 30 см. Знайдіть довжину меншої основи.

А	Б	В	Г	Д
6 см	9 см	15 см	18 см	42 см

Ключ: Г

Розв'язання. Середня лінія трапеції дорівнює півсумі основ, тоді, ввівши коефіцієнт пропорційності x , одержимо $30 = \frac{3x+7x}{2} \Rightarrow 60 = 10x \Rightarrow x = 6$. Отже, менша основа дорівнює $3x = 3 \cdot 6 = 18$ (см).

Коментар. Типові помилки, які допускають учні при розв'язанні цієї задачі пов'язані з неправильним застосуванням властивості середньої лінії трапеції (плутають з трикутником або механічно упускають ділення суми основ навпіл) та уважністю читання питання умови. Наприклад, знайшовши коефіцієнт

пропорційності x може бути поспішно обрано варіант А, або ж обрано довжину більшої сторони (дистрактор Д). При використанні такого завдання на етапі тематичних тренувальних тестів у синхронному форматі роботи з учителем радимо дати учневі самостійно виправити помилку перш ніж переглянути готовий розв'язок. При виборі дистрактора Б найімовірніше було упущено ділення суми основ навпіл. Якщо учень поверхнево володіє властивостями середніх ліній трикутника і трапеції, то може одержати результат діленням даної величини навпіл, що враховує дистрактор В.

Завдання 4. Скільки сторін має правильний багатокутник, якщо його внутрішній кут дорівнює 144° ?

А	Б	В	Г	Д
5	9	10	12	20

Ключ: В

Розв'язання. Задачу можемо розв'язати за допомогою рівняння, використавши формулу для знаходження градусної міри внутрішнього кута правильного n -кутника та його значення, дане за умовою. Таким чином одержимо $\frac{180(n-2)}{n} = 144 \Rightarrow 180(n-2) = 144n \Rightarrow n = 10$. Також цю задачу зручно розв'язати за допомогою властивості зовнішніх кутів багатокутника. Оскільки в правильного n -кутника всі зовнішні кути рівні, а сума цих кутів, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° , то можна скласти рівняння $360:n = (180 - 144)$, звідки, знову ж таки, $n = 10$.

Коментар. Дистрактор А може бути отриманий через арифметичну помилку з розкриттям дужок при застосуванні формули внутрішнього кута або, якщо була застосовано властивість зовнішніх кутів, то помилково використано суму 180° замість 360° . Отримання відповіді із варіанту Б може бути пов'язане з допущенням арифметичних помилок або помилковим орієнтиром на кратність градусної міри даного кута цьому числу, як і для дистрактора Г. Варіант Д часто обирають учні, які

орієнтуються на логіку, що градусна міра даного внутрішнього кута досить велика (близька до 180°), а отже кількість сторін має бути досить великою.

Завдання 5. Установіть відповідність між описом кута (1–3) та його градусною мірою (А–Д).

Опис кута (1-3)	Градусна міра (А-Д)
1. Кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо кут при його основі 80° .	А. 20°
2. Вписаний кут, що спирається на дугу 100° .	Б. 50°
3. Гострий кут ромба, якщо він вдвічі менший за тупий кут цього ромба.	В. 60°
	Г. 80°
	Д. 100°

Ключ: 1-А, 2-Б, 3-В.

Розв'язання. У першому пункті використаємо властивість рівнобедреного трикутника (кути при основі рівні) та суму кутів трикутника, тоді шуканий кут при вершині обчислюємо як $180 - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$. У другій задачі використаємо властивість вписаного кута кола, відповідно до якої вписаний кут дорівнює половині градусної міри дуги, на яку спирається, тобто $100^\circ : 2 = 50^\circ$. У третій задачі, позначивши кути ромба як x і $2x$, застосуємо властивість, що сума гострого і тупого кута ромба становить 180° , звідки гострий кут становить $180^\circ : 3 = 60^\circ$.

Коментар. При розв'язанні першої задачі типові помилки пов'язані з застосуванням властивості рівнобедреного трикутника. Наприклад, пам'ятаючи, що рівнобедрений трикутник має два рівні кути, може бути обрано варіант Г. Також можлива ситуація, коли учень плутає назви елементів трикутника і розв'язує цю задачу навпаки: шукає кут при основі, вважаючи кут при вершині рівним 80° , в наслідок чого буде обрано варіант Б. Дистрактор Д для цього завдання теж робочий через аналогію з властивістю суміжних або внутрішніх односторонніх при паралельних прямих і січній кутів. Через аналогічну помилку в міркуваннях може бути одержано відповідь Г у другій задачі. Також для другої задачі типовою

помилкою є плутанина властивостей вписаного і центрального кута, через що може бути обрано дистрактор Д.

Завдання 6. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів опуклого шестикутника?

А	Б	В	Г	Д
360°	540°	720°	900°	1080°

Ключ: В

Розв'язання. Сума внутрішніх кутів опуклого многокутника розраховується за формулою $180^\circ \cdot (n - 2)$, тоді для $n = 6$ маємо $180^\circ \cdot (6 - 2) = 180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$, тобто відповідь В.

Коментар. У даній задачі варіант А може бути обраним через аналогію з чотирикутником або сумою зовнішніх кутів. Інші дистрактори додержуються при помилці із записом формули, коли 180 множать не на $(n-2)$, а на n , або $(n-1)$ чи $(n-3)$. Можна вважати, що це завдання спрямоване на перевірку знання учнями «непопулярної» формули, оскільки за правильного запису формули ризик арифметичної помилки тут мінімальний.

Завдання 7. Різниця двох кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 40° . Знайдіть градусну міру меншого з цих кутів.

А	Б	В	Г	Д
40°	50°	70°	110°	140°

Ключ: В

Розв'язання. При перетині паралельних прямих січною кожен два кути або рівні, або їх сума 180° . За умовою різниця градусник мір даних кутів 40° , а отже вони не рівні, а тому матимуть суму градусний мір 180° . Позначивши ці кути як α і β , одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 180^\circ; \\ \alpha - \beta = 40^\circ. \end{cases} \Rightarrow 2\alpha = 220^\circ \Rightarrow \alpha = 110^\circ; \beta = 70^\circ.$$

Отже, менший із кутів буде 70° , що і відповідає варіанту Б.

Коментар. Обираючи в якості відповіді варіанти А або Д учні, імовірно, відштовхувалися від того, що дана градусна міра є величиною одного із утворених при перетині паралельних прямих січною кутів, а не їх різницею. Справді, якщо один із кутів при паралельних прямих і січній буде 40° , то інші будуть або 40° , або 140° (тут також не враховано, що питають про менший кут). Таке помилкове розв'язання може свідчити про нерозуміння того, як врахувати відому різницю кутів, або ж про неуважне прочитання умови задачі. Дистрактор Г відповідає ситуації, коли задачу розв'язано правильно, проте у відповідь записано більший кут. Також можливою є помилка, коли враховують, що сума цих двох кутів буде 180, розділяють навпіл і від цієї частки віднімають дану різницю, тоді буде отримано $180^\circ : 2 - 40^\circ = 50^\circ$, що відображено враховано у дистракторі Б.

Завдання 8. Установіть відповідність між геометричною фігурою (1–3) та її довжиною (А–Д).

Геометрична фігура (1-3)	Довжина (А-Д)
1. Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною $8\sqrt{3}$.	А. 4 см
2. Радіус кола, описаного навколо прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см.	Б. 5 см
3. Радіус кола, що обмежує круг площею 16π .	В. 8 см
	Г. 10 см
	Д. 12 см

Ключ: 1-В, 2-Б, 3-А.

Розв'язання. Для розв'язання першої задачі передбачаємо, що учень використовує або готову формулу $R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ для радіуса описаного навколо рівностороннього трикутника кола, або спершу знайде довжину висоти трикутника (за допомогою теореми Піфагора або формули висоти $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$), а потім застосує властивість медіан

трикутника. У такому випадку виведемо $R = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, звідки одержимо $R = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{8 \cdot 3}{3} = 8$, тобто відповідь В.

Радіус кола, описаного навколо прямокутника, дорівнює половині діагоналі, яку розрахуємо за теоремою Піфагора з одержаного після проведення діагоналі прямокутного трикутника. Діагональ прямокутника дорівнює $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$, а тому радіус описаного кола становитиме 5 см.

Для третього пункту із формули площі круга $S = \pi R^2$ отримуємо $\pi R^2 = 16\pi \Rightarrow R = 4$ см, що відповідає відповіді Г.

Коментар. Типовою помилкою для першої задачі буде хибно застосована формула для радіусу описаного кола навколо рівностороннього трикутника. Наприклад записано як $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ (формула висоти рівностороннього трикутника) або як $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ (радіус вписаного кола), через що одержано відповіді Д або А відповідно. Розповсюдженою помилкою для другої задачі я запис у відповідь розрахованої діагоналі прямокутника, тобто діаметра замість радіуса (дистрактор Г). Для третьої задачі основна помилка полягає в застосуванні формули довжини кола для знаходження радіуса замість необхідної тут формули площі круга, що призводить до вибору варіанту В в цьому пункті.

Завдання 9. У рівнобічну трапецію з площею 50 см^2 і гострим кутом 30° вписано коло. Знайдіть (у см) радіус цього кола.

Ключ: 2,5

Розв'язання. Нехай у трапеції $ABCD$ (рис. Н1) основами є BC і AD ($BC < AD$), тоді за умовою $\angle D = 30^\circ$. Опустимо висоту $CK = h$, тоді з трикутника CDK ($\angle K =$

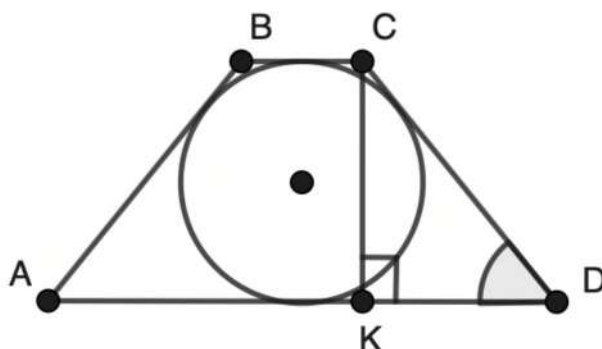


Рисунок Н1

90°) одержимо $CD = 2 \cdot CK = 2h$.

За властивістю трапеції, у яку вписано коло, сума основ дорівнює сумі бічних сторін, тоді $S = \frac{BC+AD}{2} \cdot CK = \frac{AB+CD}{2} h = \frac{2h+2h}{2} \cdot h = 2h^2$. Враховуючи відоме значення площі, одержимо $2h^2 = 50 \Rightarrow h = 5$. Тоді $r = \frac{1}{2}h = 2,5$ см.

Коментар. Основною складністю в цій задачі є застосування властивості трапеції, в яку можна вписати коло. Саме на рівності суми основ і суми бічних сторін акцентуємо увагу учнів у розв'язку цієї задачі. Також розповсюдженою помилкою є запис у відповіді довжини діаметра кола замість радіуса. Можуть мати місце і помилки в розрахунках, на які варто звертати увагу учнів.

Завдання 10. Два кола з радіусами 4 см і 9 см мають зовнішній дотик. До цих кіл проведено спільну зовнішню дотичну (рис. Н2). Знайдіть довжину відрізка (у см) дотичної між точками дотику.

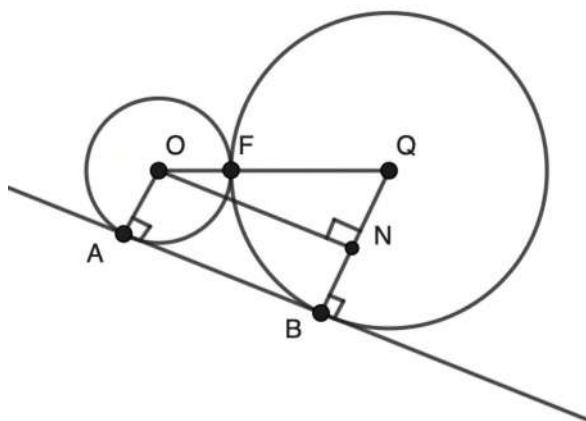


Рисунок Н2

Ключ: 12

Розв'язання. Нехай O та Q – центри кіл з радіусами 4 см і 9 см, а точки A та B – точки дотику спільної дотичної до цих кіл відповідно (рис. 2.8). Тоді за властивістю радіусів, проведених у точку дотику, $OA \perp AB, QB \perp AB$. За властивістю кіл, що дотикається, точка дотику (позначимо її F) належить відрізку OQ .

Таким чином маємо прямокутну трапецію $AOQB$ з відомими основами (4 см і 9 см) та більшою бічною стороною $OQ = OF + FQ = 4 + 9 = 13$ см. Опустимо перпендикуляр ON , тоді з прямокутного трикутника OQN , де $QN = 9 - 4 = 5$ (см), за теоремою Піфагора одержимо $ON = 12$ см, а отже і шуканий відрізок $AB = ON = 12$ см.

Коментар. Ключовими моментами у розв'язку цієї задачі є правильне визначення відстані між центрами (враховано належність точки дотику відрізку, що сполучає центри кіл) та застосування властивості радіусів, проведених у точку дотику. Після переходу до прямокутної трапеції з відомими основами та більшою бічною стороною задача зводиться до роботи з трапецією, у чому не повинно виникати складностей в учня, оскільки з теми «Чотирикутники» було досягнуто достатнього рівня, а в інакшому випадку ця задача не була б запропонована на високому рівні. Проте учня може дезорієнтувати, наприклад, нетипове розташування

цієї трапеції, і в такому випадку варто звернути увагу на задачі про чотирикутники навіть якщо з відповідної теми досягнуто достатнього або високого рівня.

Додаток П

Приклади реалізації роботи програми

Повторення математики
About

Розділи

Кабінет вчителя

Імпорт завдань

Симуляція

teacher@demo.local

Вийти

Кабінет вчителя

Поступ учнів
Коди запрошень
Банк завдань
Схеми тестів
Динаміка

Розділ

C. Рівняння

Учень	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
Андрій Ковальчук	початковий	початковий	початковий	середній	початковий	середній	середній	початковий
Марія Шевченко	середній	середній	середній	середній	середній	середній	середній	середній
Олег Бондаренко	середній	середній	достатній	середній	достатній	достатній	середній	достатній
Софія Ткаченко	достатній	достатній	достатній	достатній	достатній	достатній	достатній	достатній

Повторення математики
About

Розділи

Кабінет вчителя

Імпорт завдань

Симуляція

teacher@demo.local

Вийти

Кабінет вчителя

Поступ учнів
Коди запрошень
Банк завдань
Схеми тестів
Динаміка

Розділ

D. Нерівності

Для кожної теми показано рівень за діагностичним тестом (піворуч) і за підсумковим (праворуч).

Учень	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	Приріст
Андрій Ковальчук	мло → с	п → л	п → с	мло → п	мло → п	мло → с	мло → п	+1.14
Марія Шевченко	п → с	п → с	п → с	п → с	п → с	п → с	п → с	+1.00
Олег Бондаренко	с → с	с → д	с → д	п → с	п → с	с → с	с → д	+0.71
Софія Ткаченко	с → д	с → д	с → д	с → д	с → д	д → д	с → д	+0.86

Позначення рівня: мло — не опановано, л — початковий, с — середній, д — достатній, в — високий. «Приріст» — зміна середнього рівня за розділом (шкала 0–4).

Повторення математики
About

Розділи

Кабінет вчителя

Імпорт завдань

Симуляція

teacher@demo.local

Вийти

Кабінет вчителя

Поступ учнів
Коди запрошень
Банк завдань
Схеми тестів
Динаміка

Розділ

H. Планіметрія

Для кожної теми показано рівень за діагностичним тестом (піворуч) і за підсумковим (праворуч).

Учень	H1	H2	H3	H4	H5	Приріст
Андрій Ковальчук	мло → п	мло → п	п → с	п → п	мло → п	+0.80
Марія Шевченко	п → с	п → с	п → с	п → с	п → д	+1.20
Олег Бондаренко	п → д	с → д	с → с	п → д	п → д	+1.40
Софія Ткаченко	с → д	с → д	с → д	с → д	с → д	+1.00

Позначення рівня: мло — не опановано, л — початковий, с — середній, д — достатній, в — високий. «Приріст» — зміна середнього рівня за розділом (шкала 0–4).

П1. Відображення результатів у кабінеті вчителя

Повторення математики

Розділи

student4@demo.local

Вийти

About

Результати тесту

18 / 25

72%

правильних відповідей

результат

Динаміка результатів навчальних досягнень

Порівняння рівня володіння темами за результатами діагностичного та підсумкового тестування розділу.

Тема	Діагностичний тест	Підсумковий тест	Зміна
Лнійні рівняння, рівняння з модулем	середній	достатній	↑ +1
Квадратні рівняння	достатній	достатній	без змін
Дробові раціональні рівняння	середній	достатній	↑ +1
Ірраціональні рівняння	середній	достатній	↑ +1
Тригонометричні рівняння	середній	достатній	↑ +1
Показникові рівняння	середній	достатній	↑ +1
Логарифмічні рівняння	середній	достатній	↑ +1
Системи рівнянь	середній	достатній	↑ +1

Підвищено рівень із 7 тем із 8; жодна тема не показала зниження рівня.

Повторення математики

Розділи

student1@demo.local

Вийти

About

Результати тесту

8 / 16

50%

правильних відповідей

результат

Динаміка результатів навчальних досягнень

Порівняння рівнів володіння темами за результатами діагностичного та підсумкового тестування розділу.

Тема	Діагностичний тест	Підсумковий тест	Зміна
Лнійні рівняння, рівняння з модулем	початковий	початковий	без змін
Квадратні рівняння	не опрацювані	початковий	↑ +1
Дробові раціональні рівняння	не опрацювані	початковий	↑ +1
Ірраціональні рівняння	початковий	середній	↑ +1
Тригонометричні рівняння	не опрацювані	початковий	↑ +1
Показникові рівняння	не опрацювані	середній	↑ +2
Логарифмічні рівняння	не опрацювані	середній	↑ +2
Системи рівнянь	не опрацювані	початковий	↑ +1

Підвищено рівень із 7 тем із 8; жодна тема не показала зниження рівня.

Рівні володіння темами

Лнійні рівняння, рівняння з модулем	початковий
Квадратні рівняння	початковий
Дробові раціональні рівняння	початковий
Ірраціональні рівняння	середній
Тригонометричні рівняння	початковий
Показникові рівняння	середній
Логарифмічні рівняння	середній
Системи рівнянь	початковий

Рекомендуємо опрацювати:

Лнійні рівняння, рівняння з модулем — уроки та матеріали до рівня, вищого за поточний.

Квадратні рівняння — уроки та матеріали до рівня, вищого за поточний.

Дробові раціональні рівняння — уроки та матеріали до рівня, вищого за поточний.

Ірраціональні рівняння — уроки та матеріали до рівня, вищого за поточний.

Тригонометричні рівняння — уроки та матеріали до рівня, вищого за поточний.

Показникові рівняння — уроки та матеріали до рівня, вищого за поточний.

Логарифмічні рівняння — уроки та матеріали до рівня, вищого за поточний.

Системи рівнянь — уроки та матеріали до рівня, вищого за поточний.

П2. Приклад відображення результатів у кабінеті учня

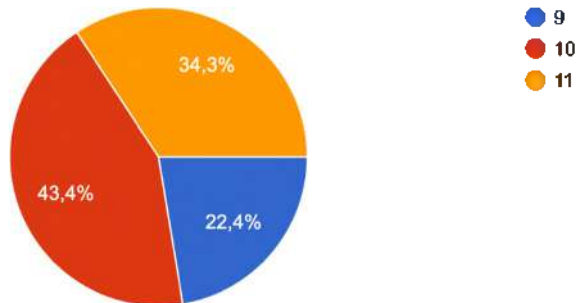
Додаток Р

Питання анкети та результати опитування учнів

№ 1

У якому ти класі?

143 відповіді



№2

Як тобі комфортніше виконувати завдання з математики?

143 відповіді



№3

Уяви ідеальний урок математики. Який темп роботи тобі підходить найбільше?

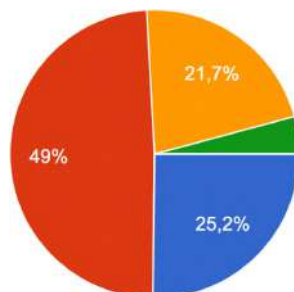
143 відповіді



№4

Чи вистачає тобі тих пояснень, що дає вчитель на уроці, для виконання домашнього завдання?

143 відповіді

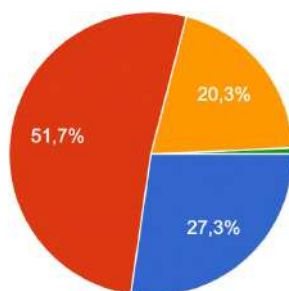


- Так, цілком.
- Зазвичай так, але складні теми доводиться розбирати зі штучним інтелектом.
- Ні, я часто шукаю відео на YouTube або інші джерела.
- Ні, я взагалі не розумію пояснень на уроці.

№5

Яке твердження описує найкраще твої стосунки з математикою?

143 відповіді

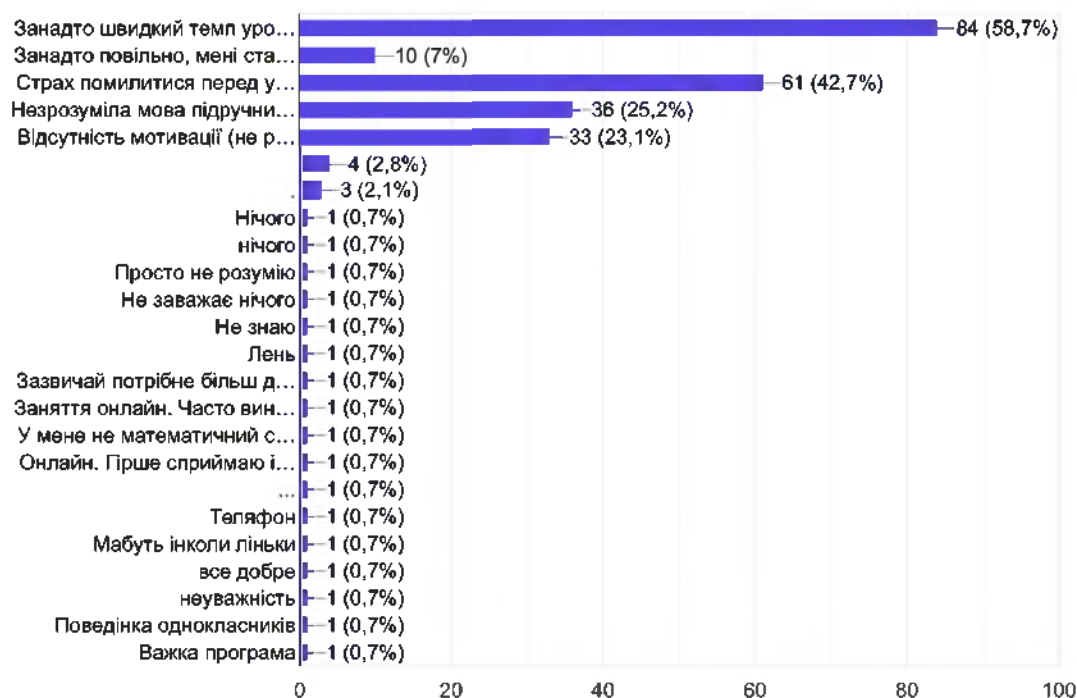


- Я використовую свій потенціал на 100%, у мене все добре.
- Я відчуваю, що можу знати математику краще, але мені щось заважає (темп уроку, нудні задачі, незрозумілі пояснення).
- Математика — це просто "не моє", я змирився/-лась.
- Мені нудно, бо шкільна програма для мене занадто легка.

№6

Якщо ти відчуваєш, що щось заважає тобі розкритися, то що саме? (Можна обрати кілька варіантів)

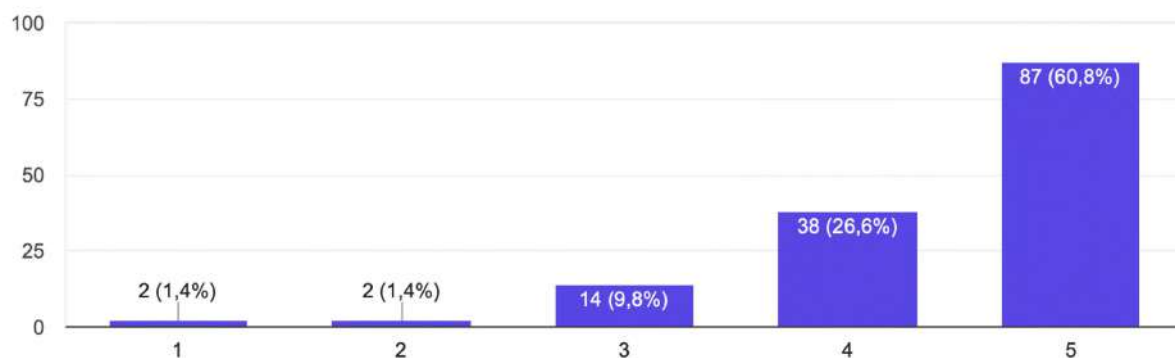
143 відповіді



№7

Уяви додаток, який працює як "персональний тренер" з математики: він аналізує твої помилки і дає ТІЛЬКИ ті завдання, які потрібні с... зайвої води). Наскільки це було б тобі цікаво?

143 відповіді



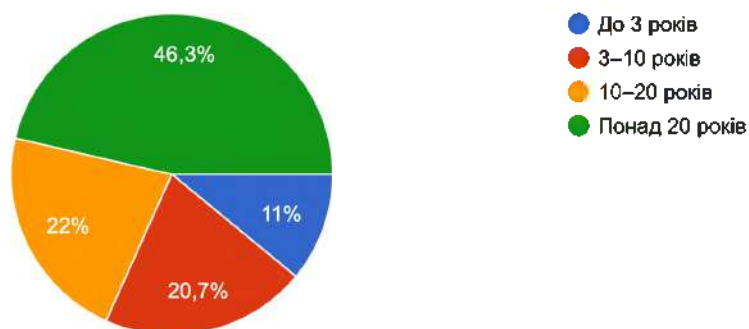
Додаток С

Питання анкети та результати опитування вчителів

№1

Ваш стаж викладання математики:

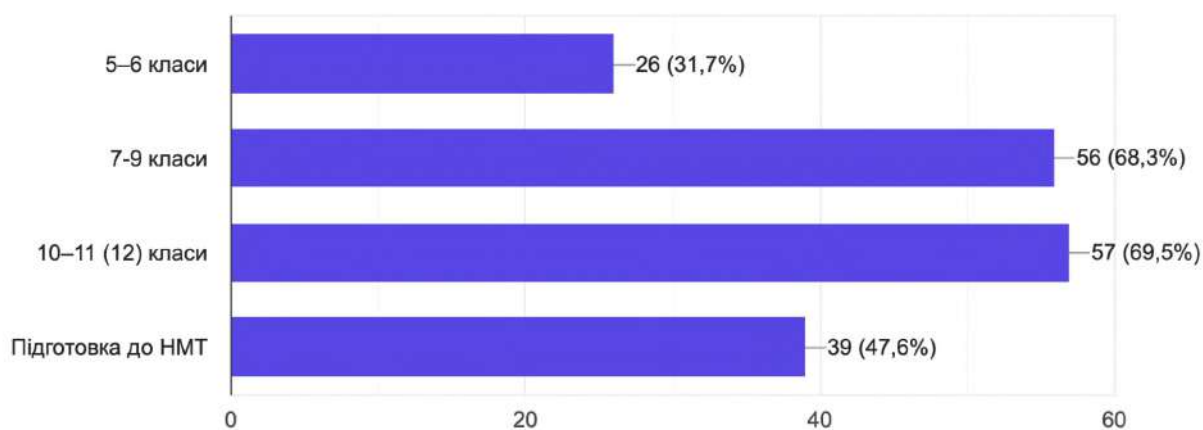
82 відповіді



№2

У яких класах ви викладаєте в поточному навчальному році? (Оберіть усі варіанти)

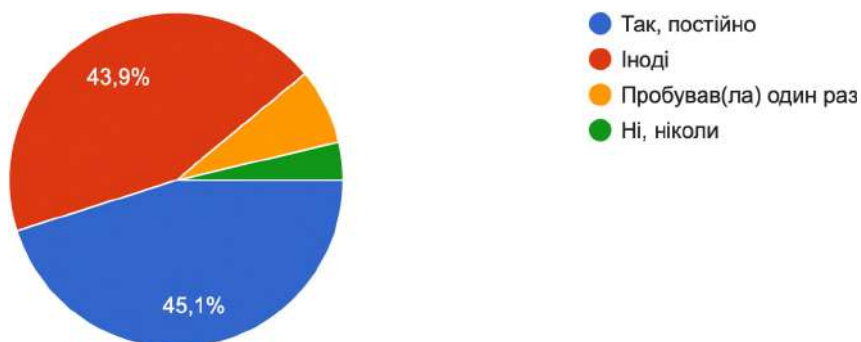
82 відповіді



№3

Чи доводилося вам використовувати онлайн-сервіси, які самі перевіряють відповіді учнів та показують їм помилки миттєво?

82 відповіді



№4

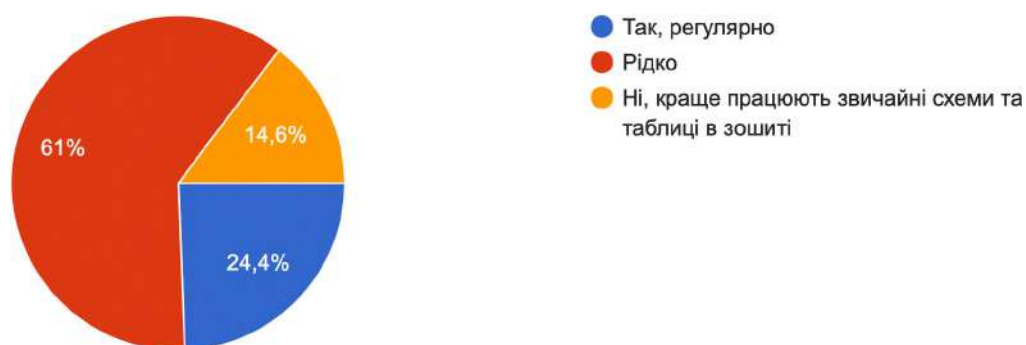
Чи використовуєте ви платформи, які будують "індивідуальний маршрут" для учня? (Наприклад: Khan Academy, GIOS, Matific, ... переходом до розділів залежно від відповіді).

82 відповіді



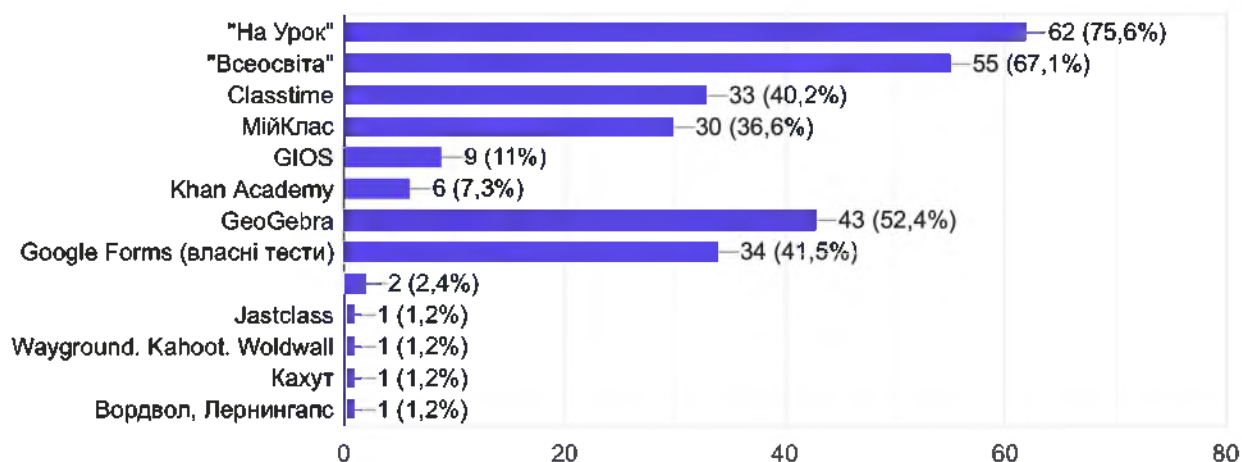
№5

Чи використовуєте ви цифрові інструменти для "систематизації знань"? (Наприклад, сервіси, які допомагають структурувати знання: інтеракт...ерують завдання з різних тем в одному тесті).
82 відповіді



№6

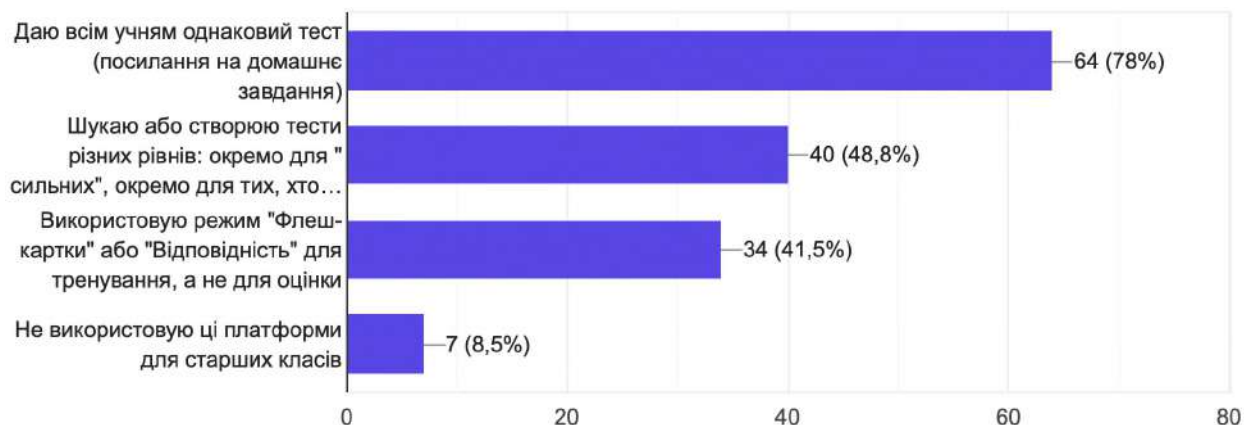
Які з перелічених платформ ви використовували у своїй практиці хоча б раз?
82 відповіді



№7

Як саме ви використовуєте бібліотеки тестів (На Урок, Всеосвіта тощо) для повторення матеріалу в 10–11 класах?

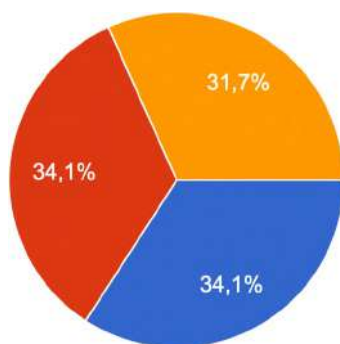
82 відповіді



№8

Платформа Classtime та її подібні дозволяють бачити відповіді учнів у реальному часі. Чи користуєтесь ви цією функцією?

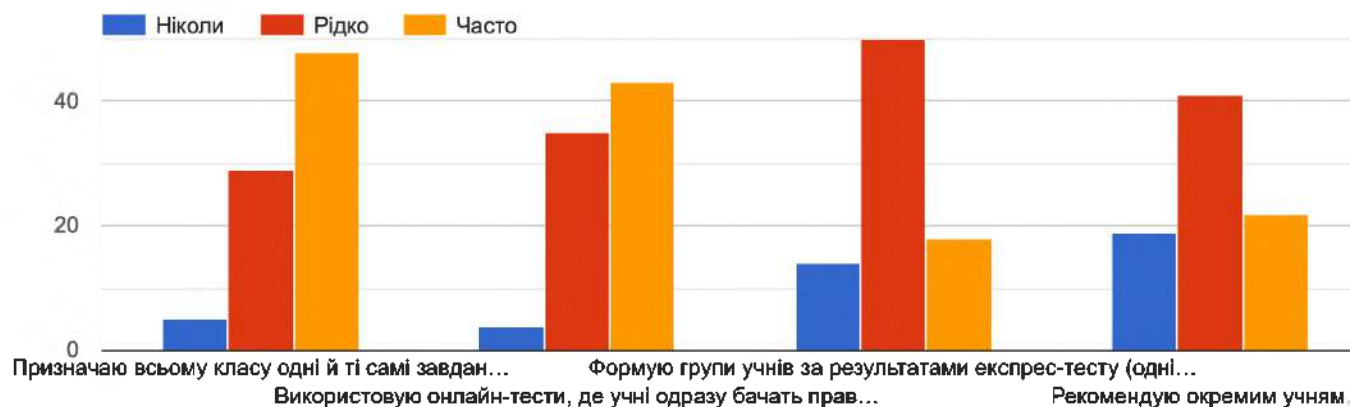
82 відповіді



- Так, я одразу бачу, хто "застряг", і підходжу допомогти (це елемент адаптивності)
- Ні, я дивлюся результати вже після уроку, щоб виставити оцінки
- Не користуюсь такими сервісами

№9

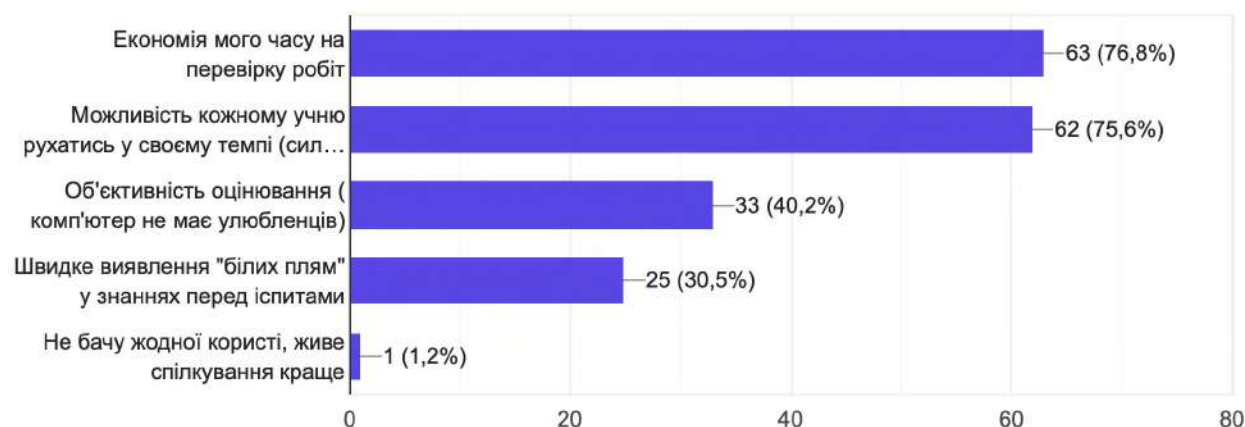
Як ви організовуєте повторення змістових ліній (наприклад, "Функції" чи "Планіметрія")



№10

Яку головну користь ви бачите (або могли б бачити) у використанні програм, що підлаштовуються під учня? (Оберіть до 2 варіантів)

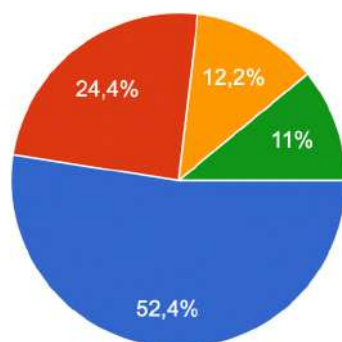
82 відповіді



№11

Яка головна проблема існуючих українських платформ (На Урок, Всеосвіта тощо) у контексті адаптивності?

82 відповіді

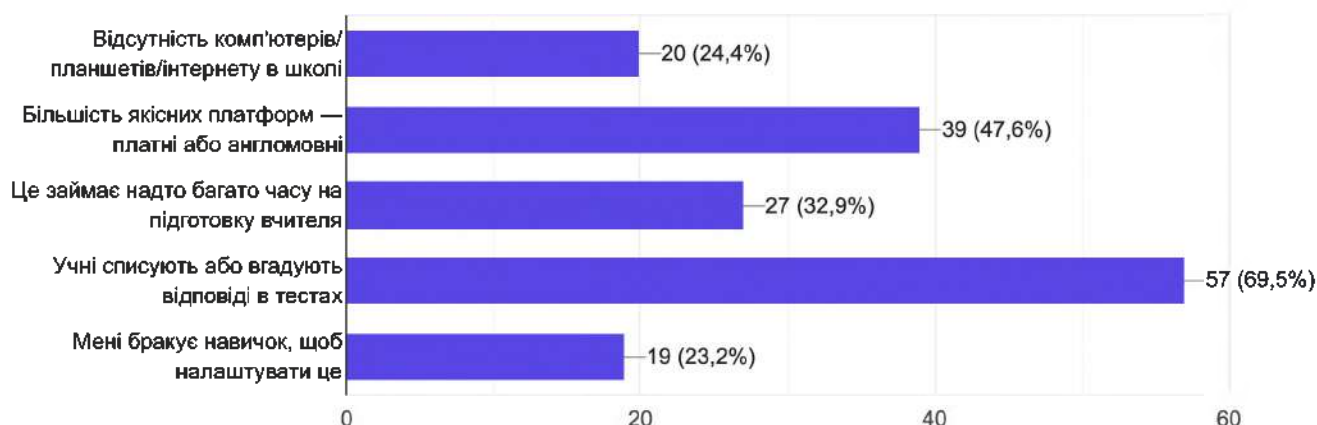


- Вони лише тестують, але не навчають (немає автоматичних підказок, якщо учень помилився).
- База завдань містить помилки, я не можу їм довіряти.
- Незручно відслідковувати прогрес окремого учня в динаміці (за місяць/рік).
- У мене немає зауважень, мене все влаштовує.

№12

Що найбільше заважає вам використовувати такі технології на уроках повторення?

82 відповіді



№13. Якби існував ідеальний електронний помічник для вчителя математики, яку одну функцію ви б хотіли в ньому бачити? (Наприклад: «Щоб сам складав варіанти контрольної для кожного учня окремо», «Щоб пояснював учню помилку голосом», тощо)

№14. Що для вас було б найбільшою допомогою від технологій при підготовці учнів до НМТ?